Trabajo Práctico N$^{\underline{o}}$10

Problema inverso

Generales

1. Repase sus apuntes teóricos y la bibliografía pertinente a fin de tener presente las características más generales del método de *gradient descent*.

Específicos

2. Implemente un algoritmo de *gradient descent* para minimizar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dados un valor inicial $x \leftarrow x_0$ y un tamaño de paso $\epsilon > 0$ *apropiadamente pequeño*, el algoritmo estará basado en calcular de manera iterativa la actualización:

$$x \leftarrow x - \epsilon\, f'(x).$$

Para escribir su método elija un tamaño de paso fijo ϵ. Luego decida si su algoritmo termina cuando: a) se cumple un número máximo de iteraciones `maxiter` o b) cuando se alcanza la condición $|f'(x)| < \delta$, para una dada tolerancia $\delta > 0$.

Utilice su algoritmo para resolver los siguientes problemas:

a) Minimizar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Parta del punto inicial $x_0 = 2$. Asegúrese de interpretar los resultados obtenidos y detectar las características del método implementado. Para ello, intente describir la relación que existe entre el x_0 inicial, el tamaño del paso ϵ y el número de iteraciones requeridas para para converger hacia el mínimo global $x^* = 0$. Por último, utilice un método de *grid search* para 100 valores equiespaciados en $-1 \leq x \leq 1$ para estimar x^*. Compare los resultados y las dos metodologías utilizadas.

b) Minimizar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3$. Parta del punto inicial $x_0 = 2$. Repita el análisis del ejercicio anterior. Parta ahora de $x_0 = -1$ y analice. Repita empleando un método de *grid search* para 100 valores equiespaciados en $-3 < x < 3$.

c) **Opcional.** Obtenga una aproximación al mínimo global de la función de Rosenbrok $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 100(y - x^2) + (x - 1)^2$. El mínimo global de f ocurre en el punto $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ y allí se cumple $f(\mathbf{x}^*) = 0$. Parta de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, utilice $\epsilon = 0{,}001$, un número de 15000 iteraciones o en su lugar, una tolerancia $\delta = 0{,}001$. Grafique en planta las lineas de nivel de la función, la ubicación del mínimo global y la trayectoria de los puntos obtenidos en cada iteración del algoritmo. Interprete.

3. Cargue el dato sintético `grav-cilindro2D-invertir.txt` de la componente vertical g_z de la atracción gravitatoria de una anomalía debidamente preprocesada en mGal (Figura 1). Los puntos de observación tienen coordenadas en m. Utilice el modelo de g_z para un cilindro 2D horizontal,

$$g_z(x; \Delta\sigma, x_0, R, z_0) = 2\pi G \Delta\sigma\, R^2 \frac{z_0}{(x - x_0)^2 + z_0^2},$$

y estime el contraste de densidad $\Delta\sigma$, el radio R y la ubicación de su centro (x_0, z_0) por medio de un algoritmo de *gradient descent*. Para ello deberá minimizar la función objetivo $q(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} ||\, \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\, ||_2^2$, cuyo gradiente es

$$\nabla q(\mathbf{m}) = -(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))\, \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = -A^T(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})).$$

En estas expresiones: $\mathbf{m} = (\Delta\sigma, R, x_0, z_0)^T$ es el vector $(M \times 1)$ de $M = 4$ parámetros a invertir; $\mathbf{d}$ es el vector $(N \times 1)$ con los N datos observados en cada estación $x = x_i$; $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ el vector $(N \times 1)$ con los datos modelados por la expresión de g_z en cada $x = x_i$ y $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = A$, la matriz jacobiana $(N \times M)$ del modelo respecto de los parámetros de interés, $A_{ij} = \frac{\partial}{\partial m_j} f(\mathbf{m})_i$.

   a) Utilice $\epsilon = 100$ y un número de 3000 iteraciones. Considere como parámetros iniciales $\Delta\sigma = 100$ kg/m^3, $R = 500$ m, $x_0 = 28$ km y $z_0 = 0{,}5$ km. Grafique el dato original y la respuesta modelada con los parámetros obtenidos por la inversión. Interprete.

   b) **Opcional.** Introduzca una modificación al algoritmo para obtener resultados aceptables en un menor número de iteraciones. Pruebe, por ejemplo *line search* o regularización.

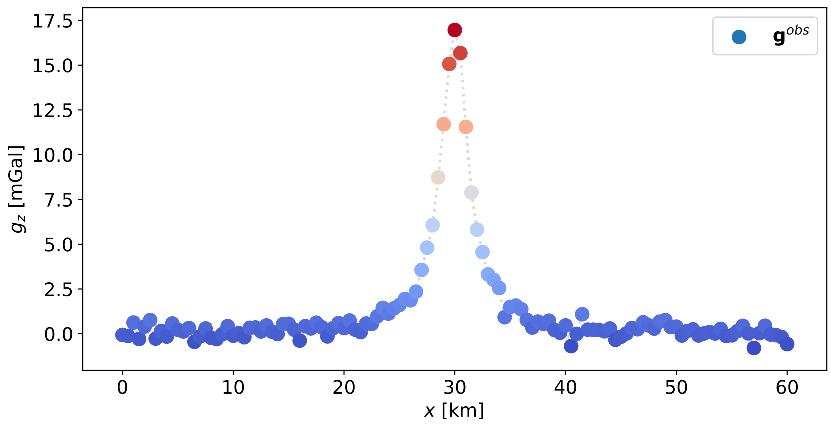

Figura 1: Observaciones de anomalía de gravedad a invertir.