Dinámica no Lineal

Fernando Parra

18 de mayo de 2014

1. Revisión de la formulación Hamiltoniana

Revisión de la mecánica Hamiltoniana. Transformaciones canónicas. Variables ángulo-acción.

La formulación lagrangeana de la mecánica posee la importante propiedad de ser covariante bajo transformaciones generales de coordenadas: las ecuaciones de Lagrange conservan su forma bajo dichas transformaciones. El uso de coordenandas generalizadas q_i la pone de manifiesto en forma explícita. Sin embargo, esta generalidad no es suficiente para muchas aplicaciones: la imposibilidad de interpretar geomñetricamente la transformación lineal que resuelve el problema de oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario es un síntoma.
Los impulsos generalizados desempeñan un papel importante en la Mecánica: para cada simetría de un sistema mecánico existe un impulso generalizado que se conserva. Estas leyes de conservación, a su vez, simplifican la formulación de problemas mecánicos. Este importante papel de los impulsos, junto con la conveniencia de generalizar las transformaciones generales de coordenadas, sugieren una formulación que trate coordenadas e impulsos en forma equivalente: la *formulación hamiltoniana*.

1.1. Las ecuaciones de Hamilton

El desarrollo de ecuaciones de movimiento simétricas en coordenadas e impulsos generalizados, exige la introducción de algunas herramientas matemñaticas particulares: las transformaciones de Legendre y el espacio de las fases.

1.1.1. Trasformaciones de Legendre

Las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ y los impulsos generalizados p_i forman un conjunto redundante de variables y es necesario eliminar unas en funcion de las otras. Para hacerlo, examinemos la interpretacion geometrica de los impulsos generalizados.

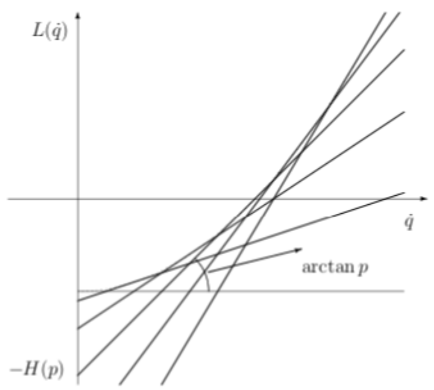

Figura 1: Esquema de la transformación de Legendre en 1 dimensión.

Examinaremos primero el caso de un grado de libertad. Como los impulsos generalizados se definen por la ecuación:

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \tag{1}$$

el impulso generalizado es la pendiente del lagrangeano como función de la velocidad generalizada $\dot{q}$ 1

Hamiltoniano del péndulo, soluciones exactas y aproximadas. Separatriz. Puntos fijos: análisis de estabilidad. Variables estables e inestables. *Whiskered Torus*. Concepto de linealidad y no linealidad. Otros ejemplos: oscilador cuártico.

Sistemas integrables, definición, concepto de estabilidad. Ejemplos. Perturbaciones a Hamiltonianos integrables. Sistemas casi-integrables.

Teorías clásicas de perturbaciones, series asintóticas, pequeños denominadores, convergencia de las series. Método de *averaging*. Ejemplos.

Resonancia no lineal. Resonancia entre sistemas 1D y una perturbación externa. Modelo de péndulo para la resonancia. Parámetros.

Resonancias en sistemas multidimensionales. Descripción geométrica en el espacio de las acciones y en el espacio de frecuencias. Modelo para la resonancia. Parámetros. Ejemplos.

Teoría perturbativa para una resonancia: Mapa standard. Propiedades. Pertusbaciones a la Separatríz: mapa de la separatriz. Propiedades. Estocastidad e inestabilidad local. Exponentes de Lyapunov, entropía KS. Concepto de la difusión de Arnol'd.