Estadística Aplicada

Práctica 3 - Distribución conjunta - Propagación de errores

1- Las variables *x* e *y* tienen una densidad de probabilidad conjunta definida como sigue:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 0.25 & -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

¿Son las variables *x* e *y* estadísticamente independientes?

2- Un par de variables *x* e *y* tienen una función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Encontrar *E*[*x*/ *y* = 0.5] recordando que $\mathrm{E}(x/\mathrm{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{xy}(x/\mathrm{y})dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_{xy}(x,\mathrm{y})dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,\mathrm{y})dx}$

3- Dado un conjunto de partículas distribuidas uniformemente sobre una superficie esférica de radio *R*. Calcúlese la probabilidad de encontrar partículas dentro del ángulo sólido $d\Omega$ .en función de (φ,λ).¿Cuál será la probabilidad de encontrar una partícula para φ comprendido entre 30° y -30°?

4- Teniendo en cuenta que el coeficiente de correlación se define como:

$$\rho(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\sigma_\mathrm{x}\sigma_\mathrm{y}}$$

Demuestre las siguientes propiedades:

a) $-1 \le \rho(\mathrm{x},\mathrm{y}) \le +1$,

b) Si x e y son independientes, entonces $\rho(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$

c) Si existe una relación funcional entre x e y, y=H(x); entonces $\rho(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \pm 1$

5- Dada la gaussiana de dos variables:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

a) Halle la distribución unidimensional: $f_x(x)$.

b) Calcule $f_{r\theta}(r,\theta)$ con *r* y θ coordenadas polares. ¿Es $f_{r\theta}(r,\theta)$ una gaussiana?

c) Si , $\sigma_x = \sigma_y$ calcule la distribución radial $f_r(r)$.

d) Repita los dos primeros ítems tomando: $f_{xyz}(x,y,x)$ y $f_{r\theta\phi}(r,\theta,\phi)$.

6- Considere una distribución tridimensional de partículas que obedece a la ley de Maxwell-Boltzmann de velocidades.

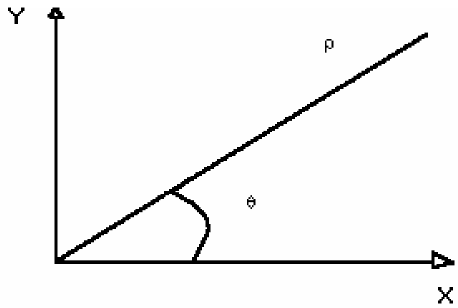
$$f_{\vec{v}}(\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^2\sigma^3}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

Calcule E[1/*v*], teniendo en cuenta que $v = |\vec{v}|$.

7- Sea $X_{n\times 1}$ un vector de variables aleatorias, $C_{X\ n\times n}$ su matriz de varianza covarianza y $A_{m\times n}$ una matriz de coeficientes constantes. Si $Y_{m\times 1} = A_{m\times n}X_{n\times 1}$ una transformación lineal, calcule $C_{Y\ m\times m}$, matriz de varianza covarianza de *Y*.

8- Sea $X_{n\times 1}$ un vector de variables aleatorias y $C_{X\ n\times n}$ su matriz de varianza covarianza. Si $Y_{n\times 1} = F(X)$ para $F : R^n \longrightarrow R^m$. Calcular $C_{Y\ m\times m}$.
¿Que diferencia hay entre las matrices de varianza covarianza obtenidas en los ejercicios 7 y 8?

9- En un sistema de coordenadas cartesianas se miden las coordenadas de un punto *x*, *y*. Las mediciones se realizan con un aparato cuyo error en *y* es 3 veces más grande que el error en *x*. Las mediciones en *x* y en *y* son independientes.
Si tenemos que:



Calcule, θ y $C_{\rho\theta}$. Interprete los elementos de la matriz de varianza covarianza obtenida para el punto (*x*,*y*) = (1,1).

10-a) ¿Cómo resultarían los errores en ρ y θ del ejercicio 8 si consideráramos que estos se propagan transformando las "barras de error" de *x* y de *y* a coordenadas polares?
b) Cómo resultarían los errores del ejercicio 8 si consideráramos que estos se propagan según:

$$\delta\rho = \left.\frac{\partial\rho(x,y)}{\partial x}\right|^{x_0,y_0} \cdot \delta x + \left.\frac{\partial\rho(x,y)}{\partial y}\right|^{x_0,y_0} \cdot \delta y$$

$$\delta\theta = \left.\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}\right|^{x_0,y_0} \cdot \delta x + \left.\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}\right|^{x_0,y_0} \cdot \delta y$$

c) Compare los resultados de los incisos a) y b) con los obtenidos en el ejercicio 8.

11- Se tiene una serie de posiciones, *x*(*t*), medidas a lo largo del tiempo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t_1) = l_1 + v_1 \\ x_2(t) &= x(t_2) = l_2 + v_2 \\ &\ldots \\ x_n(t) &= x(t_n) = l_n + v_n \end{aligned}$$

Considere que las posiciones a lo largo del tiempo son no correlacionadas y de igual precisión y que se conoce el valor de *t* con un error despreciable.

Si $\dot{x}$ es la velocidad, con $\dot{x}_i = \dfrac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1,\ldots,n-1$, calcule $C_{\dot{x}}$

Nota: Ley de propagación de errores: Si $y = Ax$, entonces para las varianzas vale $C_y = AC_xA^T$, donde x e y son conjuntos de variables aleatorias vinculadas por expresiones lineales cuyos coeficientes están en la matriz A.