Estadística Aplicada
Práctica 2 - Variable aleatoria

1- Considere la variable aleatoria discreta que resulta de tirar un dado. Graficar la función de probabilidad y la función acumulativa de probabilidad si:

a) el dado es 'perfecto' y los 6 números tienen la misma probabilidad de salir.
b) el dado está 'cargado' y el número 4 tiene el doble de probabilidad de salir que los otros 5.

Nota: tener en cuenta que la función de probabilidad es discontinua y sólo toma valores no nulos para los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

2- Suponga la siguiente función de densidad de probabilidad para cierta magnitud aleatoria real *x*:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de *a* y graficar *f*(*x*).
b) ¿Cuál será la probabilidad de que $x \in [0,1/2]$? ¿y a [1/2,1]?
c) Hallar la media o valor esperado de *x*.¿Coincide con el máximo de *f*(*x*)?
d) Hallar la varianza y la dispersión de *x*.
e) Hallar y graficar la función acumulativa de densidad de probabilidad.

3- Se estudia una agrupación de estrellas que tiene geometría esférica. Se quiere verificar que la distribución de estrellas sobre la superficie de la esfera en cuestión es uniforme. Para ello se observan las estrellas en la superficie exterior de la esfera con un telescopio. El método de observación permite identificar a cada estrella mediante un ángulo medido entre una línea arbitraria y el radio vector que une la estrella con el centro del campo. Llamamos inclinación a este ángulo. Como nuestro método de observación no nos permite medir directamente la distribución de estrellas sobre la esfera en forma tridimensional, debemos trabajar con la distribución de inclinaciones observada. ¿Qué distribución de inclinaciones deberíamos esperar de ser cierta nuestra suposición de que existe una distribución uniforme de estrellas sobre la superficie de la esfera? (Ver figura 1)

Nota: El observador se encuentra ubicado en el centro de la esfera.

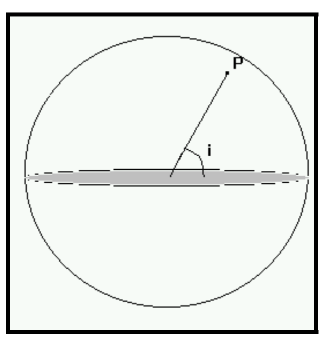

Figura 1

4- Sea *x* e una variable aleatoria y *C* una cte. Calcule:
a) μ_{Cx} ; b) μ_{x+C} ; c) σ^2_{x+C} ; d) σ^2_{Cx}

5- Sea *x* una variable aleatoria. Si *y* = *ax* + *b* ¿Cuáles serían los valores de *a* y *b* para que $\mu_y = 0$ y $\sigma^2_y = 1$?

Nota: Para estos valores de a y b, y se denomina 'variable aleatoria estandarizada correspondiente a x'.

6- Demuestre que para una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es continua, unimodal y simétrica en torno a su máximo, su moda y mediana resultan ser iguales.

Comentario**:** siendo x una variables aleatoria y $f(x)$ su densidad de probabilidad,

- la *moda* de $f(x)$ se define como el valor x donde la densidad toma su valor máximo

- la *mediana* de $f(x)$ se define como el valor x tal que $\int_{-\infty}^{x_{mediana}} f(x)\,dx = 0.5$

7- Una corriente eléctrica *I* que fluctúa se puede considerar como una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo (9,11) amperios. Si esta corriente pasa por una resistencia de 2 ohm, la potencia es $P = 2*I^2$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la corriente pertenezca al intervalo (9,10) amperios?
b) Explique por qué *P* puede considerarse como una variable aleatoria y encuentre una expresión para su función de densidad de probabilidad.
c) Calcule la probabilidad de que la potencia tenga valores comprendidos en el intervalo (162,200) Watt y en el intervalo (162, 202) Watt. ¿Qué relación existe con el valor hallado en el inciso a)?

8- La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria *v* cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(v) = av^2 e^{-bv^2}, \quad v > 0$$

donde $b = m/2kT$ y k,T y m denotan la constante de Boltzman, la temperatura absoluta y la masa de la molécula respectivamente.

a) Calcular la constante *a* (en función de *b*).
b) Obtener la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $e = mv^2/2$, que representa la energía cinética de la molécula.
c) Calcular la probabilidad de encontrar una partícula con energía comprendida entre 0 y 1.

9- Suponga que $P(x \le 0.29) = 0.75$ donde *x* es una variable aleatoria continua con alguna función de densidad de probabilidad en (0,1). Si *y* =1-*x*, determinar *k* de modo que $P(y \le k) = 0.25$.

10- Se tiene una variable aleatoria x con $\mu_x = 1$.

a) Calcular la cota superior para la probabilidad de que $|x - \mu_x| \ge \frac{3\sigma_x}{2}$ obtenida a partir de la desigualdad de Chevyshev. (Nota: buscar una cota para $P[|x - \mu_x| \ge \frac{3\sigma_x}{2}]$)
b) Si x tiene una distribución uniforme en (1-1/$\sqrt{3}$, 1+1/$\sqrt{3}$), ¿ Cuál es su probabilidad exacta?

Sugerencia: Desigualdad de Chevyshev $P\left[|x - \mu_x| \ge k\sigma\right] \le k^{-2}$