MATEMATICAS ESPECIALES I - Curso 2014
PRACTICA 6

Funciones holomorfas elementales: trigonométricas, hiperbólicas, función exponencial.

1. Probar que
   (a) e^z es holomorfa en $\mathbb{C}$, y se cumple $(e^z) = e^z$, y $|e^z| = e^{Re(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$,
   (b) $e^z \neq 0$ en $\mathbb{C}$,
   (c) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$,
   (d) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
   (e) Si $e^z = e^w$ entonces existe k, número natural, tal que $z = w + 2k\pi i$.
2. Demostrar que
   (a) $\cos(z) = \cos(-z)$, $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$
   (b) $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$
   (c) $\operatorname{sen} i\bar{z} = \overline{\operatorname{sen}(iz)}$, si y solo si $z = n\pi i$, n número entero
   (d) $|\mathrm{sh(y)}| \leq |\operatorname{sen}(\mathrm{z})| \leq \mathrm{ch(y)}$, $|\mathrm{sh(y)}| \leq |\cos(\mathrm{z})| \leq \mathrm{ch(y)}$, $\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$
   (e) $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ se anulan solo en puntos del Eje real.
3. Demostrar que
   (a) $\operatorname{sen}(iz) = i\mathrm{sh(z)}$, $\cos(\mathrm{iz}) = \mathrm{ch(z)}$, $\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$
   (b) $\mathrm{sh}(-\mathrm{z}) = -\mathrm{sh(z)}$, $\mathrm{ch}(-\mathrm{z}) = \mathrm{ch(z)}$, $\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$
   (c) $\mathrm{sh}(\mathrm{z} + \mathrm{i}\pi) = -\mathrm{sh(z)}$, $\mathrm{ch}(\mathrm{z} + \mathrm{i}\pi) = -\mathrm{ch(z)}$
   (d) $|\mathrm{sh(z)}|^2 = \mathrm{sh}^2(\mathrm{x}) + \operatorname{sen}^2(\mathrm{y})$, $|\mathrm{ch(z)}|^2 = \mathrm{sh}^2(\mathrm{x}) + \cos^2(\mathrm{y})$
   (e) sh(z) y ch(z) se anulan solo en puntos del Eje imaginario.
4. Probar que
   (a) $e^{\bar{z}}$ no es holomorfa en $\mathbb{C}$.
   (b) $\operatorname{sen}(\bar{z})$ y $\cos(\bar{z})$ no son holomorfas en $\mathbb{C}$
   (c) $\mathrm{sh}(\bar{\mathrm{z}})$ y $\mathrm{ch}(\bar{\mathrm{z}})$ no son holomorfas en $\mathbb{C}$
5. Encontrar todas las raíces de las ecuaciones siguientes.
   (a) $e^z = 1 - i$
   (b) $e^{2i\pi z} = 1$
   (c) $\cos(z) = \sqrt{2}$
   (d) $\operatorname{sen}(z) = 2$
   (e) $\mathrm{sh(z)} = \mathrm{i}$
   (f) $\mathrm{ch(z)} = 1/2$
6. Probar que $|\tanh\left(\frac{1+i}{4}\right)\pi| = 1$.

7. Hallar el dominio de definición y derivabilidad de

   (a) $f(z) = \dfrac{z+2}{e^z + i - 1}$

   (b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{1 - \cos(\pi z)}$

   (c) $f(z) = \dfrac{z^2 + 4}{\mathrm{ch(z)}}$

   (d) $f(z) = \dfrac{e^z + 2}{\mathrm{sh(z)}}$

8. Determinar la imagen correspondiente a:

   (a) la recta $x = c$,

   (b) la recta $y = c$,

   por medio de la transformación $w = \mathrm{e}^z$. Es el mapeo uno a uno?

9. Encontrar la imagen correspondiente a

   (a) la franja semi-infinita $-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi$

   (b) el sector $1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \pi$

   por medio de la transformación $w = e^z$ y mostrar las partes correspondientes a la frontera.

10. Determinar la imagen de la recta:

    (a) $x = c, \quad \pi/2 < c < \pi$

    (b) $x = c, \quad -\pi < c < -\pi/2$

    por medio de la transformación $w = \operatorname{sen}(z)$ y mostrar que el mapeo es uno a uno.

11. Encontrar la imagen correspondiente a

    (a) la franja semi-infinita $0 \leq x \leq \pi/2, \quad y \geq 0$

    (b) el sector $0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq 1$

    por medio de la transformación $w = \operatorname{sen}(z)$ y mostrar las partes correspondientes a la frontera.

12. Demostrar que la transformación $w = \mathrm{ch(z)}$ mapea los puntos $z = iy$, donde $0 \leq y \leq \pi/2$, sobre el segmento $0 \leq u \leq 1, \quad v = 0$.

13. Demostrar que por la transformación $w = \mathrm{ch(z)}$ la imagen de la franja semi-infinita $x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq \pi/2$ es el primer cuadrante del plano w. Indicar las partes correspondientes a la frontera.