MATEMATICAS ESPECIALES I - Curso 2014
PRACTICA 5

Algunos mapeos importantes: función lineal como rotación, dilatación y traslación - inversión - funciones bilineales - Mapeos conformes.

1. (a) Encontrar la imagen de la región $y \leq \frac{1}{2}x - 1$, $x \geq 1$ por la transformación $w = z - 2 + i$
   (b) Hallar la imagen $|z - i| \leq 2$ por la transformación $w = (2 - i)z - 3i$
   (c) Hallar la función lineal que transforme el triángulo limitado por las rectas $y = -2x - 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $y = -x + 2$ en otro triángulo idéntico pero con el cateto menor apoyado en el eje horizontal positivo y el cateto mayor contenido en el eje vertical positivo.
2. Dada la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, hallar su imagen por las siguientes transformaciones. Graficar la curva imagen, interpretándola como una combinación de rotación, dilatación y traslación.
   (a) $w(z) = 2z + i$
   (b) $w(z) = 2iz + i$
3. Dada la transformación $w(z) = \dfrac{1}{z}$ (inversión),
   (a) Hallar y graficar la imagen de $|z - 2| < 2$
   (b) el segundo cuadrante
4. Demostrar que por medio de la transformación $w(z) = \dfrac{1}{z}$
   (a) La imagen de una circunferencia es una circunferencia o una recta
   (b) La imagen de una recta es una circunferencia o una recta.
5. La transformación definida por $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ recibe el nombre de transformación bilineal o transformación fraccionaria o de Möbius.
   (a) Hallar los puntos fijos de la transformación bilineal.
   (b) Probar que la transformación bilineal puede considerarse como una combinación de transformaciones de traslación, rotación, dilatación/contracción e inversión.
   (c) Probar que la transformación bilineal transforma círculos o rectas del plano z en círculos o rectas del plano w.
   (d) Probar que la composición de dos transformaciones bilineales es otra transformación bilineal.
6. Considere la transformación $w = \dfrac{z}{z - i}$. Hallar las imágenes de:
   (a) la circunferencia $|z| = 1$,
   (b) el semiplano $y \geq 2x$
7. (a) Encontrar la transformación bilineal que mapee los puntos 0, $2i$, 1 en -1, $1 - 2i$, 0, respectivamente.

(b) Encontrar la transformación bilineal que mapee los puntos 1, i, -1 en 0, i, ∞, respectivamente.

(c) Encontrar al transformación bilineal que envíe la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $u = 0$. Cual es la imagen de $|z| \leq 1$?

(d) Encontrar una transformación bilineal que tenga a $z_1 = 2$ y a $z_2 = -2$ como puntos fijos. Es única?

8. (a) Hallar la imagen del segundo cuadrante por $w(z) = z^2$

   (b) Hallar la transformación que envíe $|Arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}$, $|z| \leq 2$ al semiplano $u \leq 0$

9. Dada la transformación $f(z) = \dfrac{1}{z}$

   (a) Si α es el ángulo de inclinación de la tangente a la curva que pasa por $1+i$, hallar el el ángulo de inclinación de su imagen en el punto $f(1+i)$

   (b) Teniendo en cuenta el item anterior, hallar la imagen de la recta $y = x$ por $f(z) = \dfrac{1}{z}$

   (c) Demostrar que las imágenes de las rectas $y = x - 1$ e $y = 0$ son la circunferencia $\left|w - \dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ y la recta $v = 0$, respectivamente. Trazar las gráficas de estas curvas y comprobar que el mapeo es conforme en el punto $z_0 = 1$. Determinar el ángulo que giran las tangentes a las curvas en $w(z_0)$. Comprobar que el ángulo que determinan las curvas transformadas en $w(z_0)$ es el mismo que el que determinaban las curvas originales al cortarse en z_0.

10. Determinar dónde son conformes las siguientes transformaciones:

    (a) $w(z) = z^2 + 2z$

    (b) $w(z) = \dfrac{z-1}{z+i}$

    (c) $w(z) = z + \dfrac{1}{z}$

    En cada caso, determinar el ángulo que giran las tangentes a las curvas que pasan por el punto $z_0 = i$ al ser transformadas por $w(z)$.

11. (a) Probar que la función $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, transforma el semiplano superior en el disco unitario ($\alpha \in \mathbb{R}$).

    (b) A partir de esta función, hallar una transformación que envíe el disco unitario en el semiplano superior.