MATEMÁTICAS ESPECIALES I - Curso 2014
PRÁCTICA 4

Condiciones de Cauchy-Riemann - Analiticidad - Singularidades

1. Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, probar que las funciones del ej. 11 Práctica 3 no son derivables en ningún punto $z \in \mathbb{C}$.

2. Si $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$, se cumple que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 3x^2$. ¿Por qué es cierto que $f'(z) = 3x^2$ solamente en $z = i$?

3. Demostrar que la función $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ no es derivable en el origen pero que las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en ese punto.

4. Hallar los valores que deben tomar las constantes α, β y γ para que la función $f(z) = x + \alpha y + i(\beta x + \gamma y)$ sea una función entera.

5. (a) Mostrar que la función $x^2 + iy^3$ no es analítica en $\mathbb{C}$ y sin embargo las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $(x,y) = (0,0)$. ¿Es esto contradictorio?
   (b) Idem para $f(z) = \bar{z}z^2$
   (c) Idem para $f(z) = \sqrt{|xy|}$

6. Para las siguientes funciones indicar los dominios de definición, de derivabilidad y de analiticidad. Encontrar $f'(z)$ en el caso de que exista.
   (a) $f(z) = |z|^2$
   (b) $f(z) = z + \mathrm{Re}\,(\mathrm{z}^2)$
   (c) $f(z) = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,(z)$
   (d) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$
   (e) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2-6z+10}$
   (f) $f(z) = z^2|z|$
   (g) $f(z) = 2x + ixy^2$
   (h) $f(z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2) + ix(x^2-2y)$
   (i) $f(z) = \dfrac{\bar{z}+1}{|z+1|^2}$
   (j) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$
   (k) $f(z) = \cos(x+y) + i\,\mathrm{sen}\,x$

7. Hallar y clasificar las singularidades de las funciones del ejercicio anterior.

8. Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio D, demostrar que f es constante si
   (a) la función $\overline{f(z)}$ es analítica en D.
   (b) $|f(z)|$ es constante $\forall z \in D$

(c) $f(z)$ toma únicamente valores imaginarios $\forall z \in D$

(d) $\arg(f(z))$ es constante $\forall z \in D$

(e) $f(z) = u + iv, \quad v = u^2$

9. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un dominio D. Demostrar que las familias de curvas de nivel definidas por:

$$u(x, y) = \alpha$$

$$v(x, y) = \beta$$

donde α y β son constantes arbitrarias, son ortogonales. Es decir, demostrar que si z_0 es un punto común a dos curvas particulares de dichas familias y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces las tangentes a estas curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares. ¿Qué ocurre cuando $f'(z_0) = 0$?

10. Encontrar las curvas de nivel $u(x, y) = \alpha$ y $v(x, y) = \beta$, si u y v son las funciones componentes de $f(z) = z^2$ y comprobar que son ortogonales excepto cuando $\alpha = \beta = 0$. ¿Cómo se explica ésto teniendo en cuenta que $f(z)$ es una función entera?