MATEMÁTICAS ESPECIALES I - Curso 2014
PRÁCTICA 2

Sucesiones de números complejos - Límite de sucesiones complejas - Relación con los límites de parte real e imaginaria - Algebra de límites - Límite infinito

1. Graficar el conjunto imagen de las siguientes sucesiones. Determinar (si existen) sus puntos de acumulación.
   (a) $z_n = i^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
   (b) $z_n = \dfrac{i^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
   (c) $z_n = (-1)^n (1 - \dfrac{1}{n})(1 + i), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
   (d) $z_n = 1 + (-i)^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$
   (e) $z_n = \mathrm{e}^{in\pi/2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$
   (f) $z_n = \mathrm{e}^{i\pi/n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$
2. (a) Separar las sucesiones del ejercicio anterior en sus partes real e imaginaria. Hallar los límites (si existen) de cada una de ellas.
   (b) A partir de los cálculos realizados en el item anterior, determinar el límite (si existe) de dichas sucesiones.
3. (a) Dada $z_n = 1 + ni, \ n \in N$, graficar y hallar las sucesiones de las partes real e imaginaria. Hallar los límites (si existen) de cada una.
   (b) El mismo pedido para $w_n = (z_n)^{-1}$.
   (c) Calcular los límites de $|z_n|$ y de $|w_n|$. Qué relación hay entre ellos?
4. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos. Probar que:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ (*Hint:* usar la desigualdad $||z| - |w|| \leq |z - w|$)
   (b) Comprobar con un contraejemplo que no vale la recíproca.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$
5. Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$. Probar que:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = ab$.
   (c) Si $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{a}{b}$.
6. Sea $z_n = -\dfrac{1}{n^2} + \left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right) i, \ n \geq 1$.

(a) Graficar z_n y comprobar que los puntos se encuentran sobre la recta $x + y = 2$.

(b) Graficar $-z_n$, $\bar{z}_n$. Sobre qué recta se encuentran?

(c) Graficar $1/z_n$. Comprobar que los puntos pertenecen a la circunferencia centrada en $\frac{1}{4}(1-i)$ y radio $r^2 = 1/8$.

(d) Calcular y comparar los límites de las cuatro sucesiones.

7. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto del plano complejo. Demostrar que para cada punto z_0 que pertenece a la clausura de $\mathcal{S}$, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\mathcal{S}$ tal que $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$.

8. Sea $D = \{z : |z| > 1\}$.

(a) Hallar la frontera ∂D de D.

(b) Elegir $z_0 \in \partial D$.

i. Construir una sucesión $z_n \in D$ que sea adherente a z_0.

ii. Construir una sucesión $z_n \notin D$ que sea adherente a z_0.

(c) Construir una sucesión $z_n \in D$ adherente al punto en infinito.

9. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones convergen.

(a) $z_n = -2 + \dfrac{i(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$

(b) $z_n = \dfrac{i^n}{3^n}$, $n \geq 0$

(c) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$, $n \geq 1$

(d) $z_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i})$, $n \geq 1$

(e) $z_n = \dfrac{n}{2i^n}$, $n \geq 1$

10. Sea α un número complejo.

(a) Si $|\alpha| < 1$, cuál es el límite cuando $n \to \infty$ de α^n?

(b) Si $|\alpha| > 1$, existe el límite cuando $n \to \infty$ de α^n?

(c) Si $|\alpha| = 1$, existe el límite cuando $n \to \infty$ de α^n? (Sugerencia: escribir $\alpha = \mathrm{e}^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$).

11. Probar que si $|z| \neq 1$ el siguiente límite existe $f(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n - 1}{z^n + 1}$. Es posible definir a $f(z)$ para $|z| = 1$ de manera que resulte continua?

12. Sea $f(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{z^n + 1}$.

(a) Cuál es el dominio de definición de f, esto es, para que valores de z existe el límite que define a f?

(b) Dar explícitamente valores de $f(z)$ para varios z en el dominio de f.

MATEMÁTICAS ESPECIALES I - Curso 2014
PRÁCTICA 3

Funciones complejas de variable compleja o de variable real - Límite y continuidad. - Álgebra de límites - Derivada - Interpretaciónn geométrica.

1. Explicitar las partes real e imaginaria de las siguientes funciones:
   (a) $4z^3 + z^2 - 5z + 1$
   (b) $\dfrac{1}{z^2 - 1}$
2. Sea $z = x + iy$, y sea $f(z)$ la función cuya parte real es $u(x, y) = x - y - 2xy$ y cuya parte imaginaria es $v(x, y) = 2x - 2xy$. Hallar $f(z)$ (*Hint:* usar $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$).
3. Encontrar el $\lim\limits_{z\to i} f(z)$, si $f(z) = \begin{cases} z^2, & si \quad z \neq i \\ 0, & si \quad z = i \end{cases}$.
4. Determinar si exiten los siguientes límites:
   (a) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^3 - 2iz + 3z - 4i}{z - i}$
   (b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$
   (c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z}$
5. Muestre que:
   (a) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{3i}{z^2 + 1} = \infty$
   (b) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{3z^2}{(z - 1)^2} = 3$
6. Hallar el valor de la constante c para que la siguiente función resulte continua en $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(z - i)Re(z - i)}{|z - i|} & z \neq i \\ c & z = i \end{cases}$$

7. Probar que $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^3 + 9}$ es continua y acotada en $|z| \leq 2$.
8. Probar que $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2}$ es continua para todos los z fuera de $|z| \leq 2$.
9. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son conexos y definir (en los casos es que sea posible) una curva en el conjunto que una a los pares de puntos propuestos.
   (a) $|z| \leq 2, \quad 1 + i, 1 - i$
   (b) $1 \leq |z| < 2, \quad -\sqrt{2}, \sqrt{2}$
   (c) $|\mathrm{Re\,z}| > 1, \quad -9 + 4\mathrm{i}, 9 + 4\mathrm{i}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : z = t + it^2, t \in \mathbb{R}\}, \quad -1+i,\ 2+4i$

(e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2,\ 0 \leq \mathrm{Im\,z} \leq \mathrm{Re\,z}\}, \quad 3/2,\ \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$

10. Dadas las siguientes curvas:

    (a) $\gamma(t) = z_1(1-t) + z_2 t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C}$

    (b) $\gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i\mathrm{sen} t), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad r > 0, \quad z_0 \in \mathbb{C}$

    (c) $\gamma(t) = t + it^2, \quad -\infty < t < \infty$

    Comprobar que $\eta(t) = i\gamma'(t)$ es un vector normal a la curva $\gamma(t)$. Comparar los argumentos de $\eta(t)$ y $\gamma'(t)$ e interpretar geométricamente este resultado.

11. Usando la definición de derivada, demostrar que las siguientes funciones no son derivables en ningún punto.

    (a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

    (b) $f(z) = |z|$

    (c) $f(z) = \bar{z}$

12. Sea $f(z)$ derivable en z_0 y $g(z)$ derivable en el punto $f(z_0)$. Demostrar que la función $F(z) = g[f(z)]$ es derivable en z_0 y además

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

13. Utilizando las reglas de derivación, encontrar las derivadas de las siguientes funciones.

    (a) $g(z) = \dfrac{(z+2i)(i-z)}{2z-1}, \quad z \neq 1/2$

    (b) $g(z) = (1-4z^2)^3$

    (c) $g(z) = (iz-1)^{-2}, \quad z \neq -i$

    (d) $g(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}, \quad z \neq \pm 2i$

14. Dada la transformación $w = z^2$,

    (a) Encontrar la imagen de las curvas $y = 1$ e $y = x$. Parametrizar cada curva y su curva imagen.

    (b) Considerar el punto $z_0 = 1 + i$. Calcular el vector tangente a cada curva en z_0 y el vector tangente a la curva imagen en $w(z_0)$. ¿Qué relación encuentra?

    (c) Calcular el ángulo que determinan las curvas en z_0 y las curvas imágenes en $w(z_0)$. Comprobar que coinciden. Interpretar geométricamente este resultado