MATEMÁTICAS ESPECIALES I (Curso 2014)
PRÁCTICA 0

Números Complejos

Repaso de números complejos

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $(x+iy)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) $(3-2i)^{-1}$
   (b) $(-3+i)(-3-i)$
   (c) $(4i)^3(2-i)^2$
   (d) $(1+i)^{-1}$
   (e) $\dfrac{1+i}{i}$
   (f) $\dfrac{i}{1+i}$
2. Encontrar la parte real, la parte imaginaria y el conjugado de:
   (a) $2z^3$
   (b) $\dfrac{z+2}{z}$
   (c) $\dfrac{1}{\bar{z}}$
   (d) $\dfrac{2}{z}+2z$
3. Demostrar que cada uno de los números $1 \pm i$ es solución de la ecuación $z^2-2z+2=0$.
4. Probar que:
   (a) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$
   (b) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$
   (c) $\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(z^{-1}) < 0$
   (d) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
   (e) z es real o z es imaginario puro $\Leftrightarrow \bar{z}^2 = z^2$
   (f) $\bar{\bar{z}} = z$
   (g) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
   (h) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$
   (i) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
5. Probar que:
   (a) $z\bar{z} = |z|^2$
   (b) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$
   (c) $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

(d) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(e) $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

(f) $|z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}|z|$

6. Encontrar un valor del $arg(z)$ cuando:

   (a) $z = z_1 z_2$

   (b) $z = \dfrac{z_1}{z_2}, \quad z_2 \neq 0$

   (c) $z = z_1^{-1}, \quad z_1 \neq 0$

7. Escribir los siguientes números complejos en forma polar.

   (a) $1 + i$

   (b) $1 - i\sqrt{2}$

   (c) -3

   (d) $4i$

   (e) $2 + 2\sqrt{3}i$

   (f) $-5 + 5i$

8. Encontrar todas las raíces de los siguientes números complejos:

   (a) $(-1 + i)^{1/3}$

   (b) $(-32)^{1/5}$

   (c) $(-i)^{1/3}$

   (d) $(-1)^{1/3}$

9. Establecer la identidad $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1$. Usando este resultado, probar que si c es cualquier raíz n-ésima de la unidad distinta de uno, entonces $1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$.

10. Sea $a + ib$ un número complejo. Encontrar los números reales x e y tal que $(x + iy)^2 = a + ib$, expresando x e y en términos de a y b.

11. Hallar los valores de z que satisfacen las siguientes ecuaciones:

    (a) $z^4 + (1 + i)z^2 + 5i = 0$

    (b) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$

    (c) $z^3 - 27 = 0$

    (d) $z^4 + 4 = 0$

    (e) Se define la exponencial compleja e^z de la siguiente manera: si $z = x + iy$,

    $$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\mathrm{sen} y).$$

       i. Calcular $\mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{4}i}$, $\mathrm{e}^{i\pi}$, $\mathrm{e}^{i\pi/2}$, $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\pi i}$.

       ii. Hallar $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z)$.

       iii. Comprobar que $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ y que $\arg(\mathrm{e}^z) = y + 2k\pi$.

       iv. Comprobar que si z es real, entonces $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x$.

       v. Graficar $\mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{4}i}$, $\mathrm{e}^{i\pi}$, $\mathrm{e}^{i\pi/2}$, $\mathrm{e}^{2\pi i}$.

       vi. Comprobar que $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$

MATEMÁTICAS ESPECIALES I (2014)
PRÁCTICA 1

Conjuntos en el plano complejo.

Distancia - Topología del plano complejo - Conjuntos - Conexidad

1. Representar gráficamente los complejos z que verifican las siguientes relaciones:
   (a) $\mathrm{Re}(z) = 2$
   (b) $z^2 = \bar{z}$
   (c) $|z-1| = c, \quad c > 0$
   (d) $z^2 + (\bar{z})^2 = 2$

2. Probar que $\mathrm{Re}(z) > 0$ y $|z-1| < |z+1|$ son definiciones equivalentes de algún dominio en el plano complejo.

3. (a) Representar los siguientes conjuntos del plano complejo:
      i. $-1 \leq \mathrm{Im}(z) < 3$
      ii. $|z| < |z - 2i|$
      iii. $\mathrm{Re}(z) < -1$
      iv. $|\mathrm{Im}(z)| > 1$
      v. $|z + 2 - i| \leq 1$
      vi. $1 < |z - i| < 3$
      vii. $|z| > 2, \quad \pi/4 \leq arg(z) \leq \pi$
   (b) Cuáles de estos conjuntos no son abiertos ni cerrados ?
   (c) Cuáles son dominio ?
   (d) Cuáles son acotados ?

4. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de puntos $a+ib, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1$, donde a y b son números racionales.
   (a) Es $\mathcal{S}$ acotado?
   (b) Cuáles son los puntos de acumulación de $\mathcal{S}$, si los tiene?
   (c) Cuáles son sus puntos interiores y cuáles son sus puntos frontera?
   (d) Es $\mathcal{S}$ cerrado o abierto?
   (e) Es $\mathcal{S}$ conexo?
   (f) Cuál es la clausura de $\mathcal{S}$?

5. Responder las preguntas del ejercicio anterior si $\mathcal{S}$ es el conjunto de puntos $x + iy$, donde $0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$, con x e y números reales.

6. Determinar la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos.
   (a) $|z| > 0, \quad -\pi < \arg(z) < \pi$
   (b) $\mathrm{Im}(\frac{1}{z}) > 1/2$
   (c) $|\mathrm{Re}(z)| < |z|$

7. Si $\mathcal{S}$ es el conjunto abierto formado por todos los puntos z tales que $|z| < 1$ o $|z - 2| < 1$, ¿ es $\mathcal{S}$ conexo por arcos ?

8. * Demostrar que si $\{\mathcal{S}_i\}$ es cualquier familia de conjuntos abiertos, finita o infinita, entonces la unión $\bigcup_{i \geq 1} \mathcal{S}_i$ es un conjunto abierto.

9. * Demostrar que si $\{\mathcal{S}_i\}$ es cualquier familia finita de conjuntos abiertos, entonces la intersección $\bigcap_{i \geq 1} \mathcal{S}_i$ es un conjunto abierto.

10. * Hallar la intersección de la familia infinita de los discos abiertos definida por

$$|z - 1| < 1 + 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

¿Es este un conjunto abierto?

Los ejercicios marcados con * son opcionales.