



Apuntes de Radioastronomía

Versión Noviembre 2007
(preliminar)

Josep Martí Ribas

Profesor Titular de Universidad

Departamento de Física
Area de Astronomía y Astrofísica
Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD DE JAEN

Índice general

1. Conceptos básicos	3
1.1. Definiciones básicas	3
1.1.1. Intensidad específica	3
1.1.2. Densidad de flujo	5
1.1.3. Densidad de energía	6
1.1.4. Temperatura de brillo	7
1.2. Interacción radiación-materia y transporte radiativo	7
1.3. Emisión MASER	9
2. Antena simple	13
2.1. Parámetros fundamentales	13
2.1.1. Ley de Nyquist	13
2.1.2. Diagrama de radiación	15
2.1.3. Eficiencia de la apertura	17
2.1.4. Anchura del haz a potencia mitad	17
2.1.5. Ángulo sólido de la antena	18
2.1.6. Directividad de la antena	18
2.1.7. Ganancia	19
2.1.8. Relación entre área efectiva y ángulo sólido	19
2.1.9. Temperatura de antena	20
2.1.10. Relación entre temperatura de antena y temperatura de brillo	21
2.2. Cálculo de diagramas de radiación	22
2.3. La temperatura de antena como convolución	25
2.4. Receptores	27
2.5. Bancos de filtros	33

2.6. Receptores espectrales de autocorrelación	34
3. Interferometría	37
3.1. Sistemas de coordenadas	37
3.2. Respuesta de un interferómetro	39
3.2.1. Interferómetros aditivos	39
3.2.2. Interferómetros multiplicativos	43
3.2.3. Caso de señal no monocromática en el inteferómetro multiplicativo	45
3.2.4. Respuesta de un interferómetro a una fuente extensa	46
3.3. La visibilidad como transformada de Fourier	50
3.4. Líneas de base y exploración del plano uv	52
3.5. Frecuencia de las franjas	56
3.6. Van Cittert-Zernike	56
3.7. Control del retraso geométrico y conversión de frecuencia	61
3.8. Rotación de las franjas	64
3.9. Redes de antenas	66
3.10. Relaciones de cierre	68
3.11. El VLBI en la práctica	69
3.12. Principios de la reducción de datos	70
3.12.1. El algoritmo CLEAN	71
4. Bibliografía	73

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Definiciones básicas

1.1.1. Intensidad específica

Supongamos un campo de radiación electromagnética que esquematizamos en la Fig. 1.1. La energía dE_ν que fluye durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt , en el intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$, a través de un elemento de área dA , dentro del ángulo sólido $d\Omega$ y formando un ángulo θ con la normal, es proporcional a:

$$dE_\nu \propto \cos \theta dA d\Omega d\nu dt$$

Llamaremos **Intensidad específica** (I_ν) a la constante de esta proporcionalidad, es decir:

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{\cos \theta dA d\Omega d\nu dt}. \quad (1.1)$$

Sus dimensiones son $[I_\nu] = \text{erg cm}^{-2} \text{ strad}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ s}^{-1}$. En ocasiones esta magnitud se designa también como B_ν , del inglés brillo o *brightness*, pero esta notación puede causar confusión con la función de Planck del cuerpo negro.

El problema fundamental de la radioastronomía consiste en determinar precisamente esta intensidad específica como función de la frecuencia, la posición en el cielo, el tiempo y el estado de polarización, es decir, $I_\nu^{\text{POL}}(\alpha, \delta, t)$.

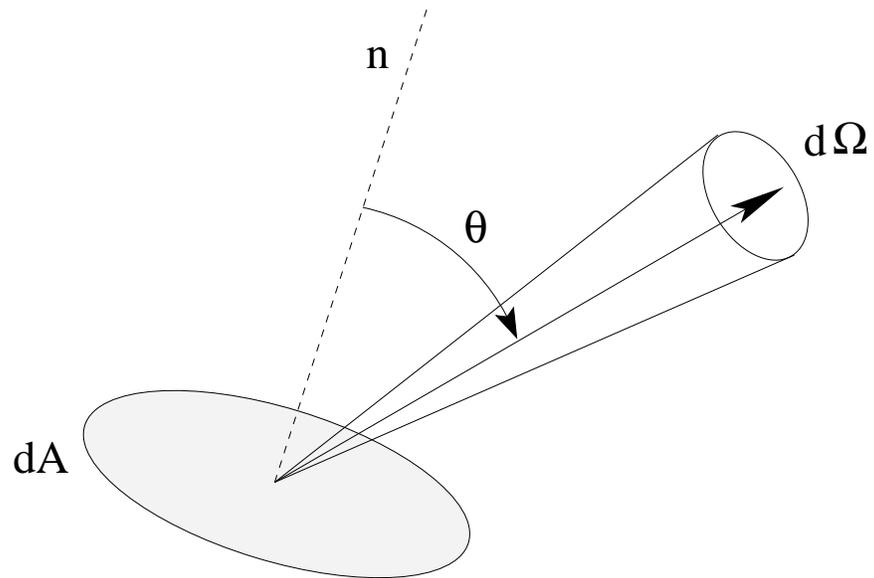


Figura 1.1: Definición de intensidad específica I_ν de la radiación.

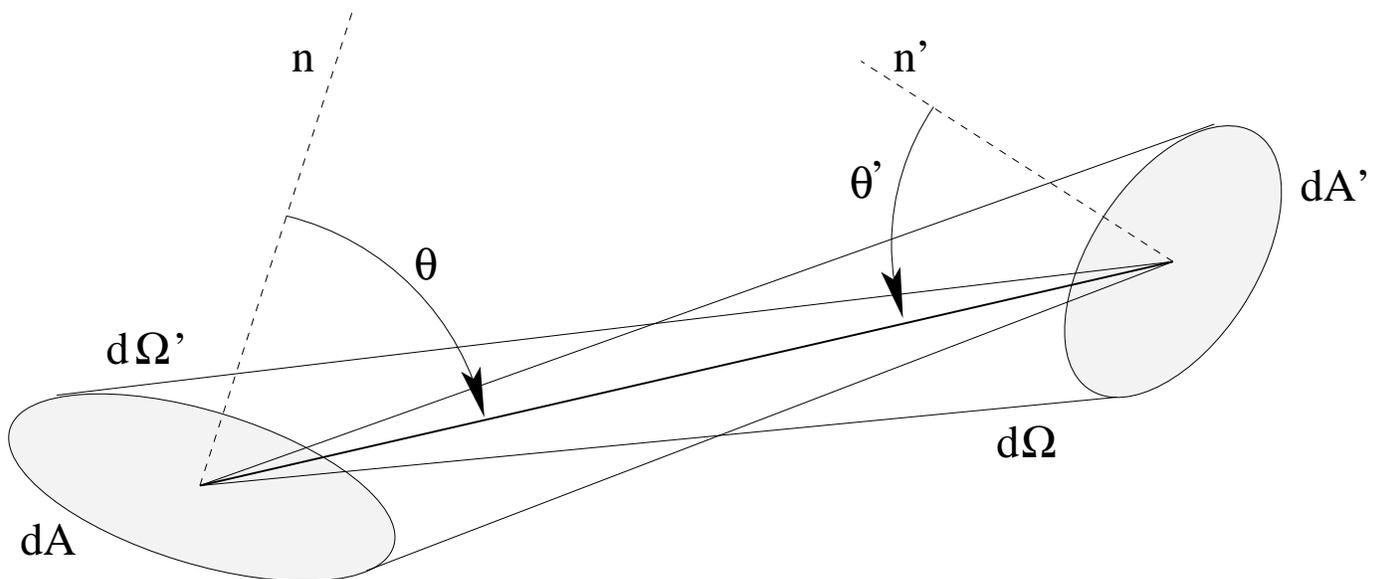


Figura 1.2: Constancia de la intensidad específica a lo largo de un rayo luminoso.

En ausencia de procesos de emisión o absorción, la intensidad específica del campo de radiación se conserva a lo largo de un rayo luminoso y no depende de la distancia. Para verlo, consideremos dos elementos de área dA y dA' separados por una distancia D y el haz de radiación que fluye del primer al segundo elemento (ver Fig. 1.2).

$dE = I_\nu \cos \theta dA d\Omega d\nu dt$ es la energía que cruza dA durante dt dentro de una banda $d\nu$ y confinada dentro del ángulo sólido $d\Omega$. Igualmente $dE' = I'_\nu \cos \theta' dA' d\Omega' d\nu dt$ es la energía que posteriormente cruza dA' también durante dt , dentro de la misma banda $d\nu$ y confinada dentro del ángulo sólido $d\Omega'$.

Los elementos de ángulo sólido cumplirán $d\Omega = dA' \cos \theta' / D^2$ y $d\Omega' = dA \cos \theta / D^2$. Sustituyendo sus expresiones arriba e imponiendo que la energía se conserva, $dE = dE'$, obtendremos:

$$I_\nu \cos \theta dA \frac{dA' \cos \theta'}{D^2} d\nu dt = I'_\nu \cos \theta' dA' \frac{dA \cos \theta}{D^2} d\nu dt$$

,

de donde, simplificando en ambos miembros, obtenemos que la intensidad específica emitida y recibida son iguales.

$$I_\nu = I'_\nu$$

.

1.1.2. Densidad de flujo

Llamaremos densidad de flujo S_ν de una radiofuente a la energía recibida de la misma por unidad de área, frecuencia y de tiempo. Partiendo de 1.1, se obtiene integrando $dS_\nu \equiv dE_\nu / (dA d\nu dt) = I_\nu \cos \theta d\Omega$ a todo el ángulo sólido subtendido por la radiofuente:

$$S_\nu = \int_{\Omega_s} I_\nu \cos \theta d\Omega.$$

Si la fuente no es excesivamente extendida, $\cos \theta$ es aproximadamente 1 para todo el dominio de integración y podemos escribir simplemente:

$$S_\nu = \int_{\Omega_s} I_\nu d\Omega. \quad (1.2)$$

La densidad de flujo nos da una idea del brillo aparente de la radiofuente y sus dimensiones son de $[S_\nu] = \text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$. Habitualmente, las unidades más usadas en radioastronomía para S_ν son el Jansky (Jy) o el miliJansky (mJy). Sus equivalencias con los sistemas de unidades internacional y cgs son:

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} = 10^{-23} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}.$$

La densidad de flujo es una magnitud que sí depende de la distancia a la fuente, puesto que el ángulo sólido que subtiende cualquier astro cae con el inverso del cuadrado de la distancia. Son muchas las fuentes celestes en el cielo tan brillantes como 1 Jy, pero incluso un objeto así observado con una antena de 100 m de diámetro ($A \simeq 8000 \text{ m}^2$) y con un ancho de banda $\Delta\nu = 100 \text{ MHz}$ produciría una señal de tan sólo 10^{-14} W aproximadamente. El conjunto de radiotelescopios más sensible actualmente (el *Very Large Array*) puede detectar fuentes que apenas superan los 0.1 mJy con una integración profunda en longitudes de onda centimétricas.

1.1.3. Densidad de energía

Una magnitud útil relacionada con la intensidad específica es la densidad de energía u_ν . Puesto que la radiación se propaga a la velocidad de la luz ($c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$), la densidad de energía por unidad de ángulo sólido es:

$$u_\nu(\Omega) = \frac{1}{c} I_\nu. \quad (1.3)$$

Mientras que la densidad total de energía se obtendrá integrando u_ν para todos los ángulos sólidos:

$$u_\nu = \int_{4\pi} u_\nu(\Omega) d\Omega = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega. \quad (1.4)$$

1.1.4. Temperatura de brillo

En el caso de un cuerpo negro a temperatura T , la intensidad específica a la frecuencia ν viene dada por la función de Planck:

$$I_\nu = B_\nu = \left[\frac{2h\nu^3}{c^2} \right] \frac{1}{\exp \left[\frac{h\nu}{KT} \right] - 1} \simeq \frac{2K\nu^2}{c^2} T, \quad (1.5)$$

donde h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y K la constante de Boltzmann. En la segunda igualdad se ha desarrollado en serie a primer orden suponiendo que $KT/h\nu \ll 1$. Esta condición corresponde a la aproximación de Rayleigh-Jeans (RJ) que suele ser muy apropiada en el dominio radio del espectro.

Con independencia de que la emisión sea de cuerpo negro o de que sea $KT/h\nu \ll 1$, se puede definir la llamada **temperatura de brillo** T_B como aquella temperatura necesaria para expresar la intensidad específica usando la aproximación de RJ de un cuerpo negro. En ese caso, dada una I_ν cualquiera su temperatura de brillo asociada viene dada por:

$$T_B \equiv \frac{c^2}{2K\nu^2} I_\nu = \frac{\lambda^2}{2K} I_\nu. \quad (1.6)$$

Por supuesto, si la emisión es realmente de cuerpo negro T_B es la temperatura física del mismo y resulta independiente de la frecuencia. De no ser así, es perfectamente posible que T_B no represente realmente la temperatura física del cuerpo celeste y que además sea distinta para las distintas frecuencias consideradas.

La densidad de flujo dada por 1.2 se puede pasar a expresar en función de T_B mediante:

$$S_\nu = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int_{\Omega_s} T_B d\Omega = \Omega_s \frac{2K\nu^2}{c^2} \langle T_B \rangle, \quad (1.7)$$

donde Ω_s es el ángulo sólido de la radiofuente y $\langle T_B \rangle$ su temperatura de brillo promedio.

1.2. Interacción radiación-materia y transporte radiativo

Hemos visto en la subsección 1.1.1 que la intensidad específica se conserva a lo largo de un rayo luminoso cuando la radiación se propaga libremente en el vacío. En presencia de materia esto ya no es así y la intensidad específica I_ν pasa a ser función de la posición. La interacción radiación-materia puede producirse mediante diferentes mecanismos que fundamentalmente son la emisión, la absorción y también el *scattering* o dispersión.

La ley que gobierna los cambios de I_ν puede obtenerse a partir de la ecuación del transporte radiativo, que proporciona una descripción fenomenológica del problema en términos de los coeficientes de emisión ϵ_ν y absorción κ_ν (ignoraremos por el momento los posibles fenómenos de dispersión). Estos coeficientes son distintos según sea el proceso físico de emisión y/o absorción considerado.

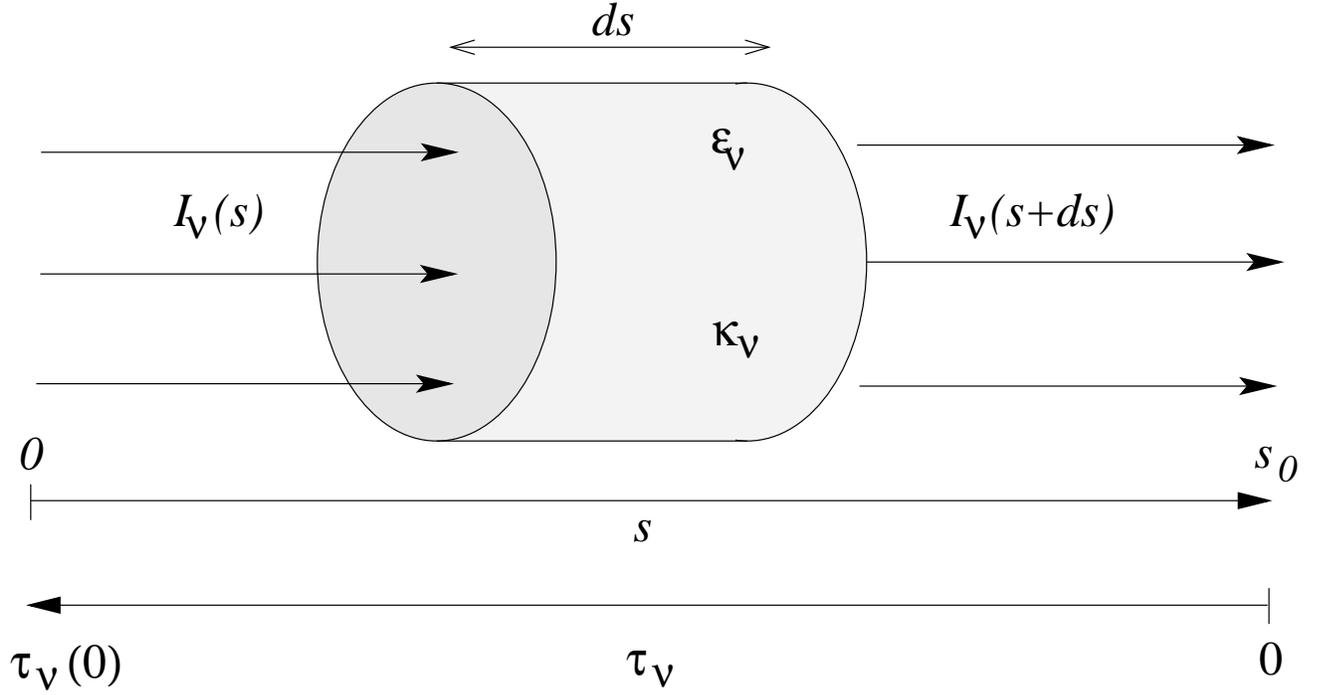


Figura 1.3: Diagrama para la deducción de la ecuación del transporte radiativo.

En la Fig. 1.3 se considera un elemento de materia de longitud infinitesimal ds que recibe una intensidad específica I_ν . En su interior, ésta se ve incrementada según el coeficiente de emisión en $\epsilon_\nu ds$ a la vez que la radiación entrante se atenúa en $-\kappa_\nu I_\nu ds$, es decir:

$$[I_\nu(s+ds) - I_\nu(s)] = \epsilon_\nu ds - \kappa_\nu I_\nu ds.$$

Dividiendo por ds y aplicando la definición de derivada, se obtiene:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu, \quad (1.8)$$

que constituye la ecuación del transporte radiativo. Esta debe plantearse teniendo en cuenta la geometría del cuerpo celeste considerado y los distintos fenómenos de emisión y absorción que deban considerarse. No obstante, 1.8 admite diversas soluciones en casos particulares de interés como son:

- Cuando sólo tenemos procesos de emisión, 1.8 y su solución se reducen a

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \epsilon_\nu, \quad I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s \epsilon_\nu(s) ds. \quad (1.9)$$

- Cuando sólo tenemos procesos de absorción, 1.8 y su solución se reducen a

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu, \quad I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \kappa_\nu(s) ds \right]. \quad (1.10)$$

- En condiciones de equilibrio termodinámico (ET), la intensidad específica coincide con la función de Planck B_ν y es por tanto independiente de la posición. Este último hecho impone una relación muy fuerte entre los

coeficientes de emisión y absorción conocida como **Ley de Kirchoff**. Tenemos entonces que:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0, \quad I_\nu = B_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu}, \quad (1.11)$$

donde

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp h\nu/KT - 1}$$

es la función de Planck que ya se ha introducido antes. La ley de Kirchoff se aplica también cuando sólo tenemos equilibrio termodinámico local (ETL). No obstante en este caso I_ν difiere en general de B_ν .

En el caso general, el problema puede ser muy complicado. Definiendo la **profundidad óptica** como:

$$d\tau_\nu \equiv -\kappa_\nu ds \quad (1.12)$$

la ecuación del transporte radiativo 1.8 se escribe como

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - B_\nu(T). \quad (1.13)$$

Su solución puede escribirse, por lo menos formalmente, multiplicando ambos miembros por $\exp -\tau_\nu$ e integrando por partes sobre τ_ν :

$$\int_0^{\tau_\nu(0)} e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d\tau_\nu = I_\nu e^{-\tau_\nu} \Big|_0^{\tau_\nu(0)} + \int_0^{\tau_\nu(0)} I_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = \int_0^{\tau_\nu(0)} (I_\nu - B_\nu) e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu(0))e^{-\tau_\nu(0)} - I_\nu(\tau_\nu(s_0))e^{-0} = - \int_0^{\tau_\nu(0)} B_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu$$

Y finalmente

$$I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu(0)} + \int_0^{\tau_\nu(0)} B_\nu(T)e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu. \quad (1.14)$$

En caso de medios isotermos ($T = \text{cte}$), la función de Planck puede salir de la integral y la solución general se simplifica a:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu(0)} + B_\nu(T)(1 - e^{-\tau_\nu(0)}). \quad (1.15)$$

Para grandes profundidades ópticas, $\tau_\nu(0) \gg 1$ esta solución tiende a $I_\nu \simeq B_\nu(T)$. Para casos ópticamente delgados, $\tau_\nu(0) \ll 1$, tenemos por el contrario que $I_\nu \simeq I_\nu(0) + B_\nu(T)\tau_\nu(0)$.

1.3. Emisión máser

Habitualmente el coeficiente de absorción κ_ν es una cantidad positiva y ello conduce a la atenuación de la radiación entrante a un medio material. No obstante, en situaciones de no equilibrio, puede ocurrir que los

fenómenos de emisión estimulada resulten dominantes frente a la absorción ordinaria y el campo de radiación se vea fuertemente amplificado. Estas condiciones fuera del equilibrio se dan cuando una molécula tiene un nivel de energía elevado mucho más poblado que su nivel inferior o, equivalentemente, una temperatura de excitación negativa. Desde el punto de vista físico, esta anómala situación es factible cuando existe un mecanismo de bombeo, habitualmente una fuente de radiación o procesos colisionales con una temperatura equivalente superior a la diferencia de energía entre niveles, capaz de crear una sobrepoblación de moléculas en el nivel superior. A la frecuencia de la transición entre niveles, la intensidad específica entrante se incrementa entonces gracias a las emisiones estimuladas que genera a su paso por el medio. Formalmente, esto es equivalente a un coeficiente de emisión $\kappa_\nu < 0$.

El fenómeno que hemos descrito es el análogo de la emisión LASER en el dominio óptico del espectro pero, por producirse en el rango de las microondas, recibe el nombre de **MASER**. Los primeros máseres astronómicos se descubrieron entre 1965-1967 al detectarse emisiones de línea moleculares cerca de regiones H II con una intensidad excesiva para tratarse de una emisión de origen térmico. Desde entonces se han detectado una gran variedad de máseres en objetos estelares jóvenes y evolucionados asociados sobre todo moléculas muy comunes, entre ellas el agua.

Resulta didáctico construir un modelo simplificado de la emisión maser para una molécula genérica con dos niveles de energía 1 y 2 cuya diferencia sea $h\nu_0$. La densidad de moléculas en cada nivel se representa por N_1 y N_2 , respectivamente. Si los niveles tienen igual peso estadístico, se puede igualar el coeficiente de Einstein B_{12} con B_{21} , que indicaremos simplemente como B . Designaremos además como A el correspondiente coeficiente de Einstein de emisión espontánea del nivel 2 al 1. La ecuación del transporte radiativo 1.8, para la frecuencia central de la transición, se expresará como:

$$\frac{dI_{\nu_0}}{ds} = h\nu_0 B N_2 I_{\nu_0} + h\nu_0 A - h\nu_0 B N_1 I_{\nu_0},$$

donde en el segundo miembro el primer término corresponde a la emisión estimulada, el segundo a la emisión espontánea y el tercero a la absorción ordinaria. Agrupando:

$$\frac{dI_{\nu_0}}{ds} = h\nu_0 [B(N_2 - N_1)I_{\nu_0} + A]. \quad (1.16)$$

Para la mayor parte de transiciones moleculares, la probabilidad de transición espontánea representada por el coeficiente A resulta despreciable frente a la acción de un máser intenso. Postularemos además que existe un mecanismo capaz de poblar el nivel superior a un ritmo R así como colisiones que inducen transiciones a un ritmo C entre los dos niveles sin producción de fotones. Poniendo $A = 0$, el balance de transiciones de 1 a 2 y de 2 a 1 resulta:

$$N_1(BI_{\nu_0} + C) + R \simeq N_2(BI_{\nu_0} + C)$$

de donde

$$N_2 - N_1 = \frac{R}{(BI_{\nu_0} + C)}$$

y sustituido en 1.16 proporciona

$$\frac{dI_{\nu_0}}{ds} = h\nu_0 \frac{BRI_{\nu_0}}{(BI_{\nu_0} + C)}. \quad (1.17)$$

Si el término colisional en 1.17 es dominante, la solución de esta ecuación diferencial proporciona un crecimiento exponencial de la intensidad específica:

$$I_{\nu_0} = I_{\nu_0}(0) \exp[\alpha_0 s], \quad (1.18)$$

donde $\alpha_0 = h\nu_0 BR/C$. En este régimen, se dice que el máser está insaturado. Cuando la intensidad específica crece hasta el punto en que la emisión estimulada resulta dominante frente a las colisiones, el segundo miembro de 1.17 se hace constante y la intensidad específica pasa a crecer pero sólo linealmente:

$$I_{\nu_0} = h\nu_0 R s. \quad (1.19)$$

Se dice entonces que el máser está saturado. Por supuesto en el mundo real las condiciones habituales se hallan en un punto medio entre estos dos casos extremos.

Capítulo 2

Antena simple

2.1. Parámetros fundamentales

Una antena es un dispositivo que capta una onda electromagnética que se propaga libremente en el espacio y la introduce en una guía de ondas que la conduce hacia un receptor donde es detectada. Las propiedades de una antena que estudiaremos a continuación son simétricas tanto si ésta se comporta como receptora o como emisora.

2.1.1. Ley de Nyquist

Esta ley data de 1928 y en el fondo es una ley del cuerpo negro. Para su deducción, consideremos una resistencia conectada a una línea de transmisión de longitud total L (ida y vuelta) todo ello en equilibrio termodinámico con el campo de radiación a temperatura T , como se muestra en la Fig. 2.1. Los electrones agitados térmicamente producen una diferencia de potencial V medible cuyo valor medio en el tiempo $\langle V \rangle = 0$ pero con desviación media cuadrática $\langle V^2 \rangle \neq 0$. Es decir, la resistencia de la línea disipará por efecto Joule una potencia que debe hallarse en equilibrio con la energía que por unidad de tiempo recibe del campo de radiación que agita sus electrones.

Calculemos la densidad de energía en la línea de transmisión. Esta será el producto de el número N de modos de oscilación permitidos en la línea con longitud de onda λ . Será tal que:

$$N \frac{\lambda}{2} = L, \quad N \frac{v}{2\nu} = L, \quad N = \frac{2L}{v} \nu,$$

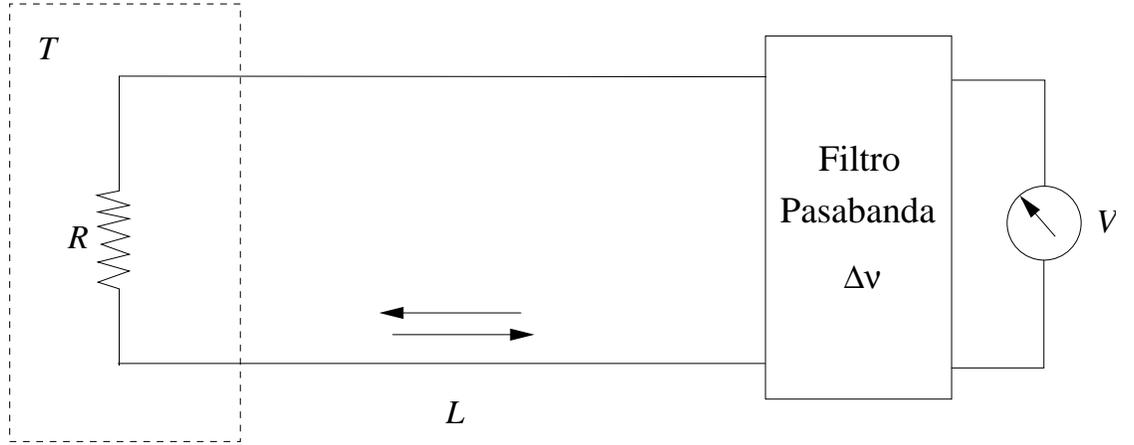


Figura 2.1: Figura para ilustrar la Ley de Nyquist que proporciona la potencia suministrada por una resistencia a una cierta temperatura dentro de un cierto ancho de banda.

donde v es la velocidad de la luz en la línea de transmisión. Por tanto, el número de modos por intervalo de frecuencia será:

$$dN = \frac{2L}{v} d\nu.$$

El número de fotones por modo viene dado por el factor de la estadística de Bose-Einstein $1/(\exp[h\nu/KT] - 1)$, donde h es la constante de Planck y K la constante de Boltzmann. Finalmente hay que multiplicar por la energía $h\nu$ de cada fotón. Agrupando factores, la densidad espectral de energía dentro de una banda $\Delta\nu$ será:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2L}{v} \Delta\nu \frac{h\nu}{(\exp[h\nu/KT] - 1)}.$$

Esta cantidad tiene dimensiones de energía y es la energía presente en la línea de longitud L . Si la cortamos, aún veremos pasar un flujo de energía por un tiempo $\Delta t = L/v$. La potencia asociada al mismo es:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{h\nu\Delta\nu}{(\exp[h\nu/KT] - 1)} \simeq KT\Delta\nu,$$

donde el factor $1/2$ surge debido a que al cortar la línea la mitad de la energía va en un sentido y la otra en otro. La aproximación final es válida para $h\nu/KT \ll 1$ lo cual es una aproximación muy aceptable en longitudes de onda radio. La potencia espectral que proporcionan los bornes de una resistencia sometida a temperatura T

queda por tanto:

$$W = KT\Delta\nu. \quad (2.1)$$

Esta potencia es independiente de la frecuencia por lo que el ruido del voltaje asociado al mismo debe tener un espectro plano (ruido blanco) dentro del ancho de banda $\Delta\nu$. Su valor suele ser muy pequeño. Por ejemplo para una temperatura ambiente de $T = 300$ K y un ancho de banda de 50 MHz, W asciende a $2,1 \times 10^{-13}$ W. La Ley de Nyquist se empleará posteriormente en el apartado 2.1.9 para definir la llamada temperatura de antena.

2.1.2. Diagrama de radiación

El diagrama de radiación $P_n(\theta, \phi)$ es una función normalizada que nos da idea de la respuesta de la antena según la dirección en que reciba o transmita la radiación. La dirección la tomaremos especificada por los ángulos (θ, ϕ) en un sistema de coordenadas polar normalmente centrado en la antena. El máximo del diagrama de radiación, de valor unidad, se obtiene para una señal que se reciba o transmita en la dirección del **lóbulo o haz principal** (generalmente donde $\theta = 0$). El diagrama de radiación puede presentar también zonas de respuesta pequeña, pero no nula, en direcciones alejadas del haz principal. Estas direcciones constituyen lo que se llama **lóbulos laterales o secundarios** de la función $P_n(\theta, \phi)$. Todo esto se ilustra esquemáticamente en la Figura. 2.2.

Recordando la definición de intensidad específica, la potencia total recibida en un cierto elemento de área, según un cierto elemento de ángulo sólido y dentro de un intervalo de frecuencia diferencia era:

$$dW_\nu = I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu.$$

Supongamos ahora que en vez de un elemento de área tenemos una antena de área finita. Sea $A_e(\theta, \phi)$ el área efectiva que, como superficie recolectora de radiación, ofrece la antena cuando se la orienta en la dirección (θ, ϕ) . El área efectiva está íntimamente relacionada con el concepto de diagrama de radiación, de modo tal que:

$$A_e(\theta, \phi) = A_e P_n(\theta, \phi),$$

donde A_e es el valor máximo o eficaz del área colectora que ofrece la antena en la dirección del haz principal, esto es, cuando $P_n = 1$.

Con esta definición, la potencia espectral recibida por la antena se puede escribir como

$$dW_\nu = \frac{1}{2} A_e(\theta, \phi) I_\nu(\theta, \phi) d\Omega d\nu.$$

El factor $1/2$ se debe que la antena es sensible sólo a una de las dos polarizaciones ortogonales en que se puede descomponer una radiación no polarizada. Suponemos además que la antena está perfectamente adaptada a la impedancia compleja que en sus terminales ofrece el conjunto del receptor y la línea de transmisión que conduce la señal hasta él.

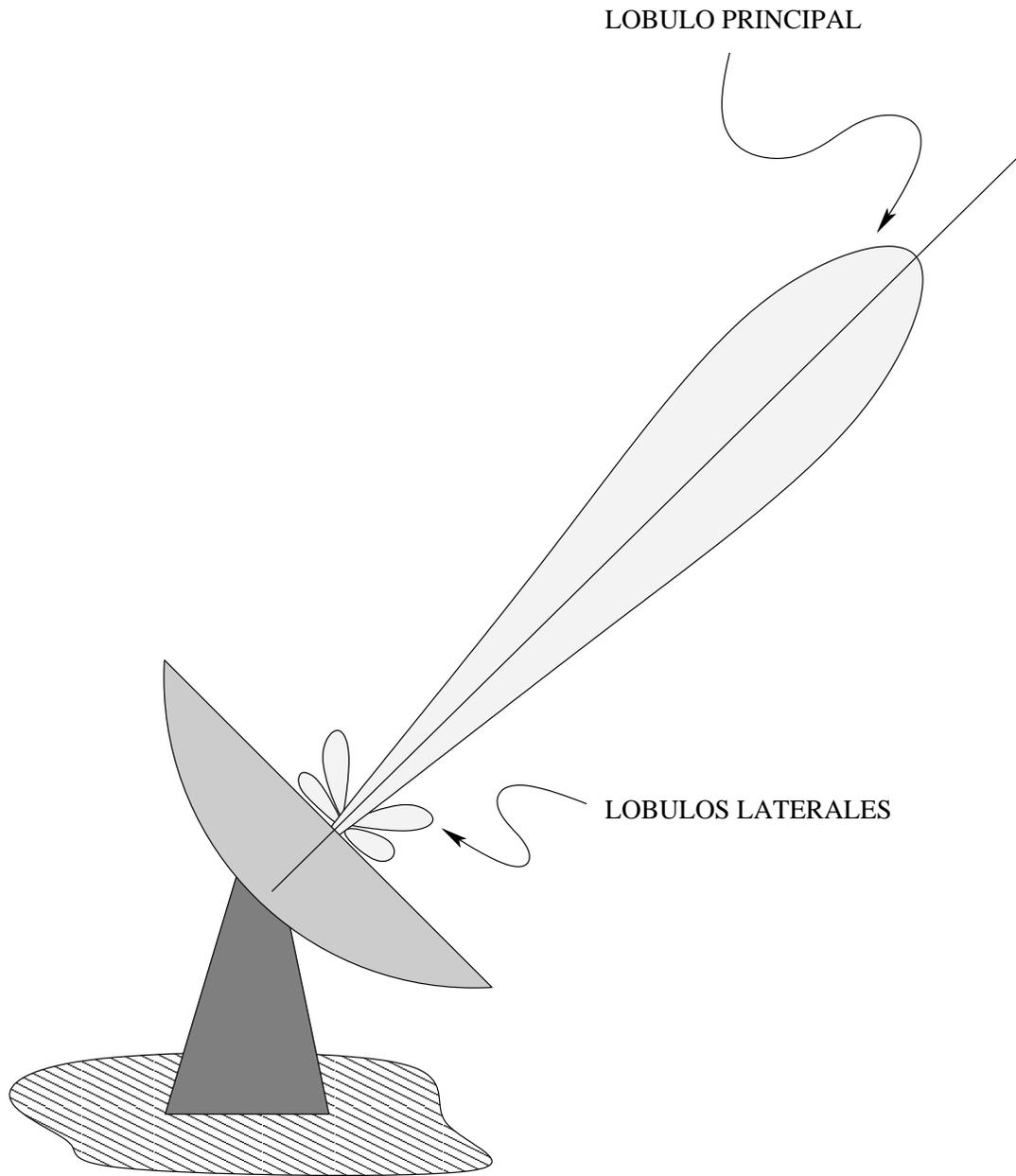


Figura 2.2: Esquema del lóbulo principal y los lóbulos laterales de una antena.

La potencia espectral total que recibe la antena se obtendrá integrando a todas las direcciones y frecuencias a las que seamos sensibles:

$$W = \frac{1}{2} \int d\nu \int_{4\pi} A_e(\theta, \phi) I_\nu(\theta, \phi) d\Omega \simeq \frac{1}{2} \left[\int_{4\pi} A_e(\theta, \phi) I_\nu(\theta, \phi) d\Omega \right] \Delta\nu, \quad (2.2)$$

donde en el último paso hemos supuesto que la antena es sensible dentro de un ancho de banda $\Delta\nu$ en el que el espectro de la radiofuente es constante.

En este punto, conviene introducir una serie de deficiones importantes.

2.1.3. Eficiencia de la apertura

La eficiencia de la apertura η_A es el cociente entre el área eficaz de la antena A_e y su área geométrica real:

$$\eta_A = \frac{A_e}{A_g}. \quad (2.3)$$

Dado que las antenas no radían en general de forma perfecta, tendremos siempre que $\eta_A \leq 1$.

2.1.4. Anchura del haz a potencia mitad

Dentro de este capítulo, estudiaremos cómo calcular de manera rigurosa el diagrama de radiación de una antena en función de la iluminación de su superficie por el campo eléctrico. Adelantaremos aquí que, en numerosos casos prácticos, el diagrama de radiación es tal que el haz principal es claramente dominante y puede aproximarse adecuadamente por una Gaussiana. P_n es entonces sólo función de θ desapareciendo la dependencia *acimutal* en ϕ . En estos casos, se define θ_{HPBW} como la **anchura del haz a potencia mitad** tal que $P_n(\theta_{\text{HPBW}}/2) = 1/2$. Veremos también que $\theta_{\text{HPBW}} \simeq \lambda/D$, donde λ es la longitud de onda de observación y D el tamaño de la antena. Por ejemplo, para la antena de 70 cm de la Red del Espacio Lejano en Robledo de Chavela tenemos que $\theta_{\text{HPBW}} \simeq 2'$ a la longitud de onda de 3.5 cm.

Para haces Gaussianos, $P_n(\theta) = e^{-\theta^2/2\sigma^2}$, la relación entre σ y θ_{HPBW} resulta de imponer que $P_n(\theta_{\text{HPBW}}/2) = 1/2$. De ahí se deduce que:

$$\theta_{\text{HPBW}} = \sigma\sqrt{8 \ln 2},$$

$$P_n(\theta) = \exp \left[-4 \ln 2 \frac{\theta^2}{\theta_{\text{HPBW}}^2} \right].$$

2.1.5. Ángulo sólido de la antena

Llamaremos ángulo sólido de la antena Ω_A a la integral para todas las direcciones del diagrama de radiación:

$$\Omega_A = \int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.4)$$

Este es un concepto ligado a las propiedades directivas de la antena como veremos a continuación.

Se puede definir también el ángulo sólido del haz o lóbulo principal de la antena restringiendo la integral anterior de modo que excluya los lóbulos laterales:

$$\Omega_M = \int_{\text{haz principal}} P_n(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.5)$$

En cualquier caso será $\Omega_M \leq \Omega_A$, pero si la antena tiene buenas propiedades directivas se tiene que $\Omega_M \sim \Omega_A$.

2.1.6. Directividad de la antena

Sea W_{TR} la potencia total radiada por la antena en todas direcciones. La potencia media radiada por estereoradián será, obviamente, $W_{TR}/4\pi$. Llamaremos **directividad** de la antena $D(\theta, \phi)$ al cociente entre la potencia radiada en una dirección $W(\theta, \phi)$ y la potencia media radiada:

$$D(\theta, \phi) = \frac{W(\theta, \phi)}{W_{TR}/4\pi}. \quad (2.6)$$

En el caso de una antena isótropa, $W(\theta, \phi) = W_{TR}/4\pi$ y la directividad es la unidad. De la definición que hemos dado, es evidente que la integral de la directividad a todas las direcciones vale 4π :

$$\int_{4\pi} D(\theta, \phi) d\Omega = 4\pi.$$

Por la definición de diagrama de radiación, la directividad de la antena debe ser proporcional a P_n . Tomando D_0 como la constante de proporcionalidad, podemos escribir:

$$D(\theta, \phi) = D_0 P_n(\theta, \phi), \quad (2.7)$$

donde D_0 se conoce como la directividad propiamente dicha. Esta constante será:

$$D_0 = \max\{D(\theta, \phi)\} = \frac{W_{\max}}{W_{TR}/4\pi} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} \frac{W(\theta, \phi)}{W_{\max}} d\Omega} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_A},$$

donde el último paso se justifica aplicando la definición de ángulo sólido de la antena. Tenemos entonces que la relación entre ángulo sólido y directividad de una antena se puede poner como:

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A}. \quad (2.8)$$

2.1.7. Ganancia

La ganancia es un concepto muy similar al de directividad pero en su definición hace intervenir la potencia total suministrada a la antena, W_T , que siempre es algo superior a la potencia total radiada W_{TR} debido a las pérdidas. En general:

$$W_{TR} = \eta_R W_T,$$

donde $\eta_R \leq 1$ es la llamada eficiencia de radiación.

Llamaremos **ganancia** de la antena $G(\theta, \phi)$ al cociente entre la potencia radiada en una dirección $W(\theta, \phi)$ y la potencia total suministrada. Por analogía con 2.6, escribiremos:

$$G(\theta, \phi) = \frac{W(\theta, \phi)}{W_T/4\pi}. \quad (2.9)$$

Aquí igualmente $G(\theta, \phi)$ será proporcional al diagrama de radiación

$$G(\theta, \phi) = G_0 P_n(\theta, \phi), \quad (2.10)$$

donde la constante G_0 es la ganancia propiamente dicha. Puede verse con facilidad que:

$$G_0 = \eta_R D_0 = \frac{4\pi\eta_R}{\Omega_A}. \quad (2.11)$$

Dado que para una antena moderna η_R es menor pero muy cercano a la unidad, en bastantes casos puede confundirse la ganancia con la directividad.

Conviene señalar aquí que es frecuente expresar la ganancia en decibelios (dB). Esta es una escala logarítmica referida a un cierto valor de referencia. En general una magnitud en dB se expresa mediante:

$$\text{Magnitud(dB)} = 10 \log \left[\frac{\text{Magnitud}}{\text{Magnitud de referencia}} \right],$$

o equivalentemente

$$\text{Magnitud} = \text{Magnitud de referencia} \times 10^{\text{Magnitud(dB)}/10}.$$

En nuestro caso, la referencia es la ganancia de una antena isótropa que ya hemos comentado es la unidad. Por ejemplo, la antigua antena de Cebreros tenía una ganancia de $G_0 = 53,3$ dB. Esto es equivalente a una constante $G_0 = 1 \times 10^{53,3/10} = 2,138 \times 10^5$. El ángulo sólido de la antena sería entonces de $\Omega_A = 4\pi/G_0 = 5,878 \times 10^{-5}$ strad = 0,1929°².

2.1.8. Relación entre área efectiva y ángulo sólido

Esta relación se puede ver de forma cualitativa sabiendo que la anchura del haz a potencia mitad es $\theta_{\text{HPBW}} \sim \lambda/D$ y que el ángulo sólido de una antena es $\Omega_A \sim \Omega_M \sim \theta_{\text{HPBW}}^2 \sim \lambda^2/D^2 \sim \lambda^2/A_e$. De donde se deduce que

$\Omega_A \sim \lambda^2/A_e$. Mediante la siguiente demostración veremos que esta similitud en orden de magnitud es, en realidad, una igualdad estricta.

Para ello consideremos el esquema de la Fig. 2.3 donde se muestra un recipiente térmicamente aislado a una temperatura absoluta T . En su interior hay una antena conectada a una resistencia R y un cavidad que se comporta como un cuerpo negro que subtiende un ángulo sólido $\Delta\Omega$ observable desde la antena. Todo el conjunto se halla en equilibrio térmico a la misma temperatura T .

La potencia que radía la antena dentro de $\Delta\Omega$, y en el rango de frecuencias $\Delta\nu$, debido a la agitación térmica de los electrones de la resistencia es, según la Ley de Nyquist:

$$kT\Delta\nu\frac{G_0}{4\pi}P_n(\theta, \phi)\Delta\Omega.$$

La potencia recibida por la antena emitida por el cuerpo negro, cuya intensidad específica es $I_\nu = 2kT\nu^2/c^2$, se puede escribir como:

$$\frac{2kT\nu^2}{c^2}\Delta\nu\frac{1}{2}A_eP_n(\theta, \phi)\Delta\Omega.$$

Al hallarse todo el recinto en equilibrio, la potencia recibida debe ser igual a la potencia radiada de donde simplificando nos queda:

$$\frac{G_0}{4\pi} = \frac{\nu^2}{c^2}A_e.$$

Y usando la relación 2.8 suponiendo $\eta_R = 1$,

$$\frac{4\pi}{\Omega_A 4\pi} = \frac{A_e}{\lambda^2},$$

que simplificado conduce a:

$$A_e\Omega_A = \lambda^2. \quad (2.12)$$

2.1.9. Temperatura de antena

Una antena que observe el cielo proporcionará una cierta potencia en la terminación de su línea de transmisión. En vez de hablar de esta potencia, se suele hablar de la **Temperatura de Antena** como la temperatura de una resistencia que proporcionase la misma potencia que la antena según la ley de Nyquist 2.1, esto es:

$$W = KT_A\Delta\nu. \quad (2.13)$$

La potencia que expresa una temperatura de antena puede tener varias contribuciones y todas ellas pueden expresarse mediante una cierta temperatura gracias a la ley de Nyquist. Entre las distintas contribuciones

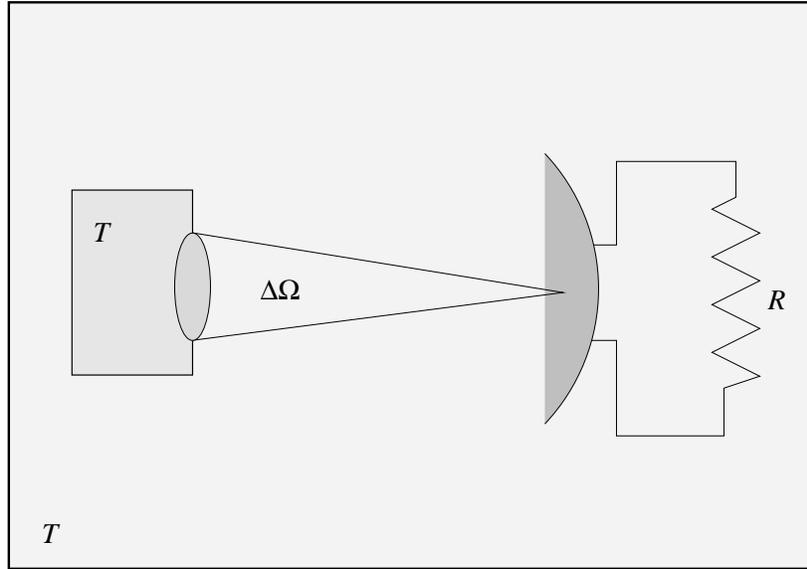


Figura 2.3: Figura para la demostración de la relación entre el área efectiva y el ángulo sólido de una antena.

podemos considerar la de la propia fuente que nos interesa observar (T_s), el fondo cosmológico de microondas ($T_{bg} \simeq 3$ K), la atmósfera terrestre (T_{atm}), la potencia recibida a través de los lóbulos laterales (T_{lob}), etc. Sumando:

$$T_A = T_s + T_{bg} + T_{atm} + T_{lob} + \dots \quad (2.14)$$

2.1.10. Relación entre temperatura de antena y temperatura de brillo

En la sección 1.1.4 hemos definido la temperatura de brillo T_B como una manera cómoda de expresar la intensidad específica I_ν de una radiofuente y que sólo tiene el significado de una temperatura física cuando la emisión es de cuerpo negro. Podemos relacionar T_B con la temperatura de antena T_A a partir de 2.13 y expresando la potencia total que la antena recibe de la radiofuente mediante:

$$W = KT_A \Delta\nu = \frac{1}{2} A_e \int_{4\pi} P_n I_\nu d\Omega \Delta\nu = \frac{1}{2} A_e \int_{4\pi} \frac{2KT_B(\theta, \phi)}{\lambda^2} P_n(\theta, \phi) d\Omega \Delta\nu.$$

Aquí, la potencia prevista por la ley de Nyquist se ha expresado como la integral de I_ν , en $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{strad}^{-1}$, sobre el ángulo sólido de la radiofuente, multiplicado por el ancho de banda, por la respuesta del diagrama de radiación según la dirección y por el área colectora eficaz de la antena. El resultado es una magnitud con dimensiones de potencia. El factor 1/2 representa que la antena es sensible sólo a una componente de la polarización de la radiación y se cancela con el factor 2 en el numerador. Simplificando en ambos miembros y recordando que según 2.12 $A_e \Omega_A = \lambda^2$, quedará:

$$T_A = \frac{1}{\Omega_A} \int_{4\pi} T_B(\theta, \phi) P_n(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.15)$$

La temperatura de antena resulta ser igual a la temperatura de brillo promediada con el peso del diagrama de radiación de la antena. Esta expresión que acabamos de obtener no es aún la más general para la temperatura de antena, que obtendremos más adelante como un producto de convolución al tratar la ecuación 2.24. No obstante, sí es interesante a partir de aquí considerar algunos casos particulares de 2.15.

Si la fuente es muy pequeña, con un ángulo sólido $\Omega_s \ll \Omega_M$ tal que sobre él $P_n \simeq 1$ y T_B es constante, nos quedará:

$$T_A = \frac{1}{\Omega_A} T_B \int_{\text{fuente}} d\Omega = \frac{\Omega_s}{\Omega_A} T_B = \left[\frac{A_e}{2K} \right] S_\nu. \quad (2.16)$$

La última igualdad surge de utilizar $\Omega_A = \lambda^2/A_e$, la fórmula de RJ y poner la densidad de flujo como $S_\nu = I_\nu \Omega_s$. De no ser T_B constante, la fórmula anterior sigue siendo válida escrita para el promedio sobre la fuente de la temperatura de brillo. El factor $[A_e/2K]$ tiene dimensiones de K/Jy y es la llamada **sensibilidad** de la antena. Sirve para pasar de temperatura de antena a densidad de flujo y puede tener una dependencia con la altura de observación debido a deformaciones de la antena. La densidad de flujo es propia de la radiofuente, pero una misma radiofuente puede dar lugar a diversos valores de temperatura de antena según sea la antena que la observe.

Si la fuente es moderadamente extensa, con $\Omega_s \sim \Omega_M$ y T_B constante, admitiendo que sólo entra energía por el lóbulo principal:

$$T_A = \frac{1}{\Omega_A} T_B \int_{\text{fuente}} P_n(\theta, \phi) d\Omega = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} T_B. \quad (2.17)$$

Por el contrario, si la fuente es muy extensa, con ángulo sólido $\Omega_s \gg \Omega_M$ y con T_B también constante, tendremos directamente que:

$$T_A = \frac{1}{\Omega_A} T_B \int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega = \frac{1}{\Omega_A} T_B \Omega_A = T_B. \quad (2.18)$$

2.2. Cálculo de diagramas de radiación

En este tema tener en cuenta las propiedades de simetría de una antena tanto para la emisión como para la recepción. El concepto de diagrama de radiación $P_n(\theta, \phi)$ ya ha sido introducido en la sección 2.1.2 y aquí daremos la expresión general para su cálculo.

Consideremos la Fig. 2.4 donde en un punto P del espacio con coordenadas (x, y, z) se propaga una onda plana monocromática en la dirección dada por los ángulos (θ, ϕ) o sus cosenos directores equivalentes (ξ, η, ζ) .

El campo eléctrico de la onda en P es proporcional a

$$\exp i(k_x x + k_y y + k_z z - 2\pi\nu t) = \exp i\frac{2\pi}{\lambda}(\xi x + \eta y + \zeta z - ct),$$

donde se han introducido los símbolos de las componentes del vector número de onda, frecuencia y longitud de onda con su significado habitual. En el plano de la apertura de la antena ($z = 0$) la amplitud del campo eléctrico sería proporcional a:

$$E_i(x', y') = \exp i2\pi(\xi x' + \eta y'),$$

siendo $x' = x/\lambda$ e $y' = y/\lambda$. Una onda plana que se recibiera de la dirección considerada produciría esta distribución de amplitud del campo eléctrico (iluminación) en la apertura de la antena y, equivalentemente, esta distribución produciría la misma onda plana si la antena funcionara en modo de emisión.

Sin embargo, el campo eléctrico global en P será la superposición de todas las ondas planas en distintas direcciones y cada una con cierta amplitud. Considerando el campo eléctrico como escalar para simplificar, esto es ignorando los efectos de la polarización, podemos escribir:

$$E(x, y, z) = \iint E_R(\xi, \eta) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\xi x + \eta y + \zeta z)} d\xi d\eta.$$

Todo este campo producirá en $z = 0$ la siguiente iluminación:

$$E_i(x', y') \propto \iint E_R(\xi, \eta) e^{i2\pi(\xi x' + \eta y')} d\xi d\eta, \quad (2.19)$$

donde al escribir el signo de proporcionalidad se han omitido los factores de propagación de la amplitud del campo desde P hasta la antena cuya dependencia fundamental sería con el inverso de la distancia. Estos factores no son importantes ya que se cancelarían al normalizar el diagrama de radiación.

La ecuación precedente nos dice que existe una relación de transformada de Fourier entre la iluminación de la antena $E_i(x', y')$ y las componentes de Fourier del campo eléctrico radiado como función de la dirección $E_R(\xi, \eta)$. La transformación inversa vendría dada por:

$$E_R(\xi, \eta) \propto \iint E_i(x', y') e^{-i2\pi(\xi x' + \eta y')} dx' dy'. \quad (2.20)$$

Como la potencia radiada en cada dirección va como el modulo al cuadrado de la amplitud, el diagrama de radiación debe ser proporcional a $|E_R(\xi, \eta)|^2$. Por lo tanto, el diagrama de radiación puede expresarse como:

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{|E_R(\xi, \eta)|^2}{|E_R(0, 0)|^2} = \frac{|E_R(\xi, \eta)|^2}{|\iint E_i(x', y') dx' dy'|^2}. \quad (2.21)$$

Aplicando esta ecuación puede verse, por ejemplo, que el diagrama de radiación de una antena de apertura rectangular uniformemente iluminada viene gobernada por funciones del tipo sinc al cuadrado. En cambio, si la apertura es circular aparecen funciones mucho más complicadas.

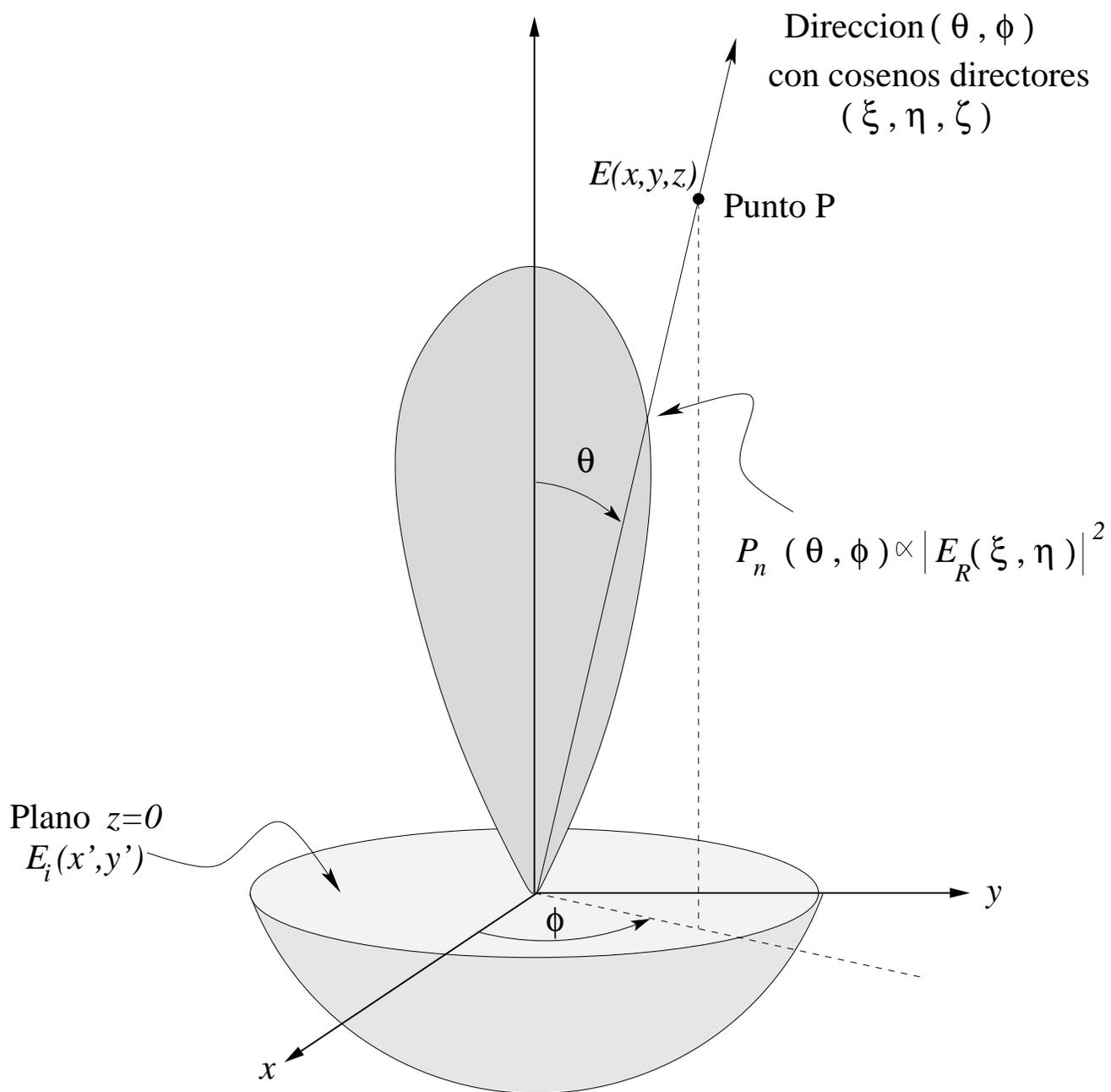


Figura 2.4: Esquema para el cálculo del diagrama de radiación de una antena en función de la iluminación de campo eléctrico en su apertura. Esta figura no está a escala pues el punto P debería hallarse a gran distancia de la antena.

2.3. La temperatura de antena como convolución

Hemos visto en 2.15 que la temperatura de antena es un promedio pesado de la temperatura de brillo con el diagrama de radiación. Podemos profundizar más en esta definición si consideramos el caso de una antena que vaya barriendo la distribución de brillo en el cielo $T_B(\theta, \phi)$. Significa esto que ahora no supondremos que la radiofuente y la antena, o su diagrama de radiación $P_n(\theta, \phi)$, no se hallan *alineados* en una misma dirección. Designado por (θ_0, ϕ_0) la dirección de apuntado de la antena, la ecuación 2.15 pasa a escribirse en este caso más general como:

$$T_A(\theta_0, \phi_0) = \frac{1}{\Omega_A} \int_{4\pi} P_n(\theta - \theta_0, \phi - \phi_0) T_B(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.22)$$

o escrito en términos de cosenos directores

$$T_A(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\Omega_A} \int_{4\pi} P_n(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) T_B(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.23)$$

Es importante insistir en que las dos fórmulas precedentes recogen a 2.15 como un caso particular cuando $\theta_0 = \phi_0 = 0$. Por otro lado, estas expresiones nos recuerdan mucho un producto de convolución de dos funciones

$$h(u) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(u-x)dx.$$

No obstante, para que realmente 2.22 y 2.23 puede expresarse de este modo hace falta una inversión de signo dentro en las variables del diagrama de radiación. Afortunadamente, la mayor parte de antenas tienen diagramas de radiación simétricos tales que $P_n(\xi, \eta) = P_n(-\xi, -\eta)$. Si esta condición se cumple, 2.22 y 2.23 puede ambas expresarse de modo compacto como:

$$T_A(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\Omega_A} P_n * T_B. \quad (2.24)$$

Por lo tanto, el mapa de temperatura de antena de una región del cielo es la distribución de temperatura de brillo de la misma convolucionada con el diagrama de radiación. Este hecho hace que los detalles de T_B se suavizan al ser observados y cualquier estructura en escalas angulares por debajo de θ_{HPBW} no resultará apreciable por una antena única. En la figura 2.5 se muestra un ejemplo unidimensional de este proceso.

Es importante constatar aquí que el hecho de la convolución no altera la densidad de flujo total de la radiofuente. Esta se ha definido anteriormente en 1.7 como $S_\nu = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int T_B d\Omega$. Sin embargo, nosotros sólo podemos medir directamente T_A y no T_B . Ensayemos definiendo $S'_\nu \equiv \frac{2K\nu^2}{c^2} \int T_A d\Omega$ y veamos si podemos relacionarlo con la densidad de flujo auténtica (sin prima). Reescribiendo usando 2.23, tenemos:

$$S'_\nu = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int \left[\frac{1}{\Omega_A} \int P_n(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) T_B(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] d\xi_0 d\eta_0.$$

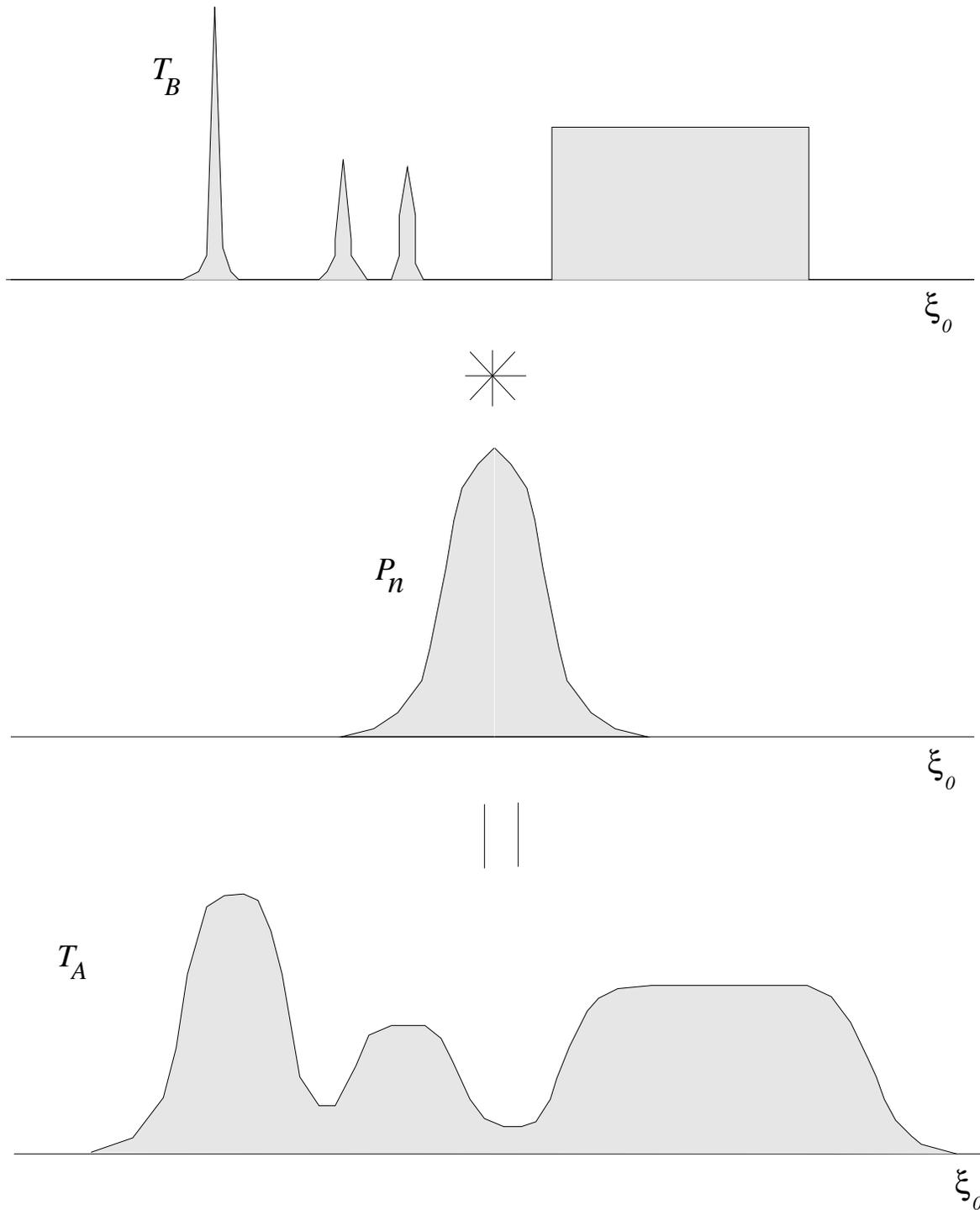


Figura 2.5: Ejemplo unidimensional de la obtención de la temperatura de antena T_A a partir de la distribución de temperatura de brillo T_B en el cielo cuando se observa con una antena cuya diagrama de radiación es P_n . El resultado es el producto de convolución $T_A = P_n * T_B$ que suaviza los detalles a la resolución angular del haz principal de la antena.

Intercambiando la integración,

$$S'_\nu = \frac{2K\nu^2}{\Omega_A c^2} \int d\xi d\eta T_B(\xi, \eta) \int d\xi_0 d\eta_0 P_n(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) =$$

$$\frac{2K\nu^2}{\Omega_A c^2} \int d\xi d\eta T_B(\xi, \eta) \Omega_A = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int d\xi d\eta T_B(\xi, \eta) = S_\nu.$$

Por lo tanto, la integral de la temperatura de antena sobre todo el ángulo sólido de la radiofuente coincide también con la densidad de flujo. En otras palabras, la antena no altera la densidad de flujo observada sino solamente la distribución de temperatura de brillo. Resumiéndolo mediante ecuaciones:

$$S_\nu = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int \int T_B(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2K\nu^2}{c^2} \int \int T_A(\xi_0, \eta_0) d\xi_0 d\eta_0. \quad (2.25)$$

Medir densidades de flujos es pues perfectamente factible con una antena. Lo difícil será restaurar T_B a partir de T_A .

2.4. Receptores

El receptor es el elemento clave del llamado *back end* de un radiotelescopio. En él, la señal recogida por la antena es filtrada dentro de una cierta banda pasante $\Delta\nu$ centrada en la frecuencia de observación ν_0 , posteriormente amplificada, detectada cuadráticamente (pues la potencia es proporcional al cuadrado del voltaje) y promediada con una cierta constante de tiempo. Del voltaje final que resulta de todo este proceso se puede deducir la temperatura de antena de la radiofuente que se observe.

El filtraje de frecuencias dentro de una cierta banda pasante puede hacerse mediante una cavidad resonante que sólo permite el paso de ciertos modos de propagación. A continuación, uno de los elementos más delicados de un receptor es su etapa amplificadora. Los amplificadores aumentan la intensidad de la señal en un factor (ganancia) $G \gg 1$. Este proceso electrónico es muy difícil de lograr sin introducir una potencia de ruido añadido a la señal amplificada.

Si entra al amplificador una señal con potencia KT_A , la salida ideal debería ser GKT_A . En la práctica ésta es en cambio $GKT_A + W_N$, donde el subíndice es la inicial de *Noise* (ruido en inglés). Se define entonces la temperatura de ruido del receptor como:

$$T_N = \frac{W_N}{GK}. \quad (2.26)$$

La acción amplificadora, incluyendo ruido, es equivalente a que la temperatura asociada a la señal entrante tuviera una contribución adicional T_N . Se define entonces la **Temperatura del Sistema** (T_S) como:

$$T_S = T_A + T_N. \quad (2.27)$$

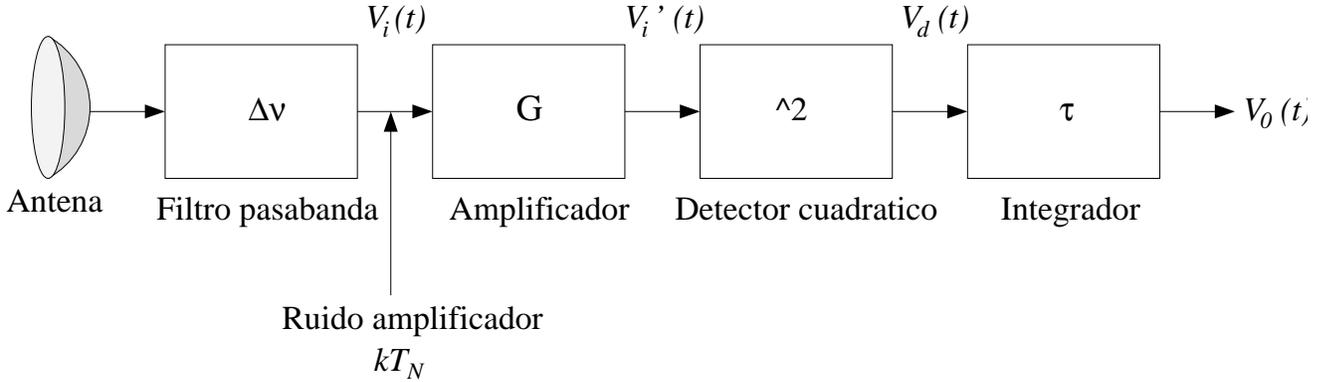


Figura 2.6: Esquema de las etapas fundamentales de un receptor de potencia total que es el dispositivo más simple para la detección en radioastronomía.

En esta definición no estamos considerando las pérdidas a lo largo de la línea de transmisión que hacen que la definición de T_A y T_S dependa algo de la posición a lo largo de la línea, debido a los problemas de atenuación y ruido adicional que ésta también introduce.

A continuación estudiaremos en detalle el caso más simple de receptor usado en radioastronomía, el receptor de potencia total. Su esquema está ilustrado en la Fig. 2.6 donde constan todas sus etapas. El receptor de potencia total es una buena base para comprender el fundamento teórico de otros receptores algo más complicados (superheterodinos, de Dicke o NAR)¹. Estos se distinguen del receptor de potencia total por la presencia de un oscilador local para mezclar y cambiar la frecuencia de detección a una frecuencia intermedia más baja (superheterodino), ciclos periódicos de observación alternando entre la antena y una carga a temperatura controlada (Dicke), o radiómetros de adición de ruido (NAR).

El espectro de frecuencia $S_i(\nu)$ de la señal en radioastronomía se supone que es constante (ruido blanco o Gaussiano) para todas las frecuencias temporales. La señal inicial viene representada por un voltaje instantáneo en función del tiempo $V_i(t)$. Esta filtrada dentro de un ancho de banda $\Delta\nu$ con un filtro pasabanda. La señal resultante sólo contiene potencia (también constante) asociada a las frecuencias dentro de esa banda. Esto se ilustra en el primer panel de la Fig. 2.7. La potencia contenida $KT_S = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(\nu)d\nu$ es el área de los dos rectángulos de la Fig. 2.7, luego la altura de estos rectángulos es $KT_S/2$.

En la etapa de amplificación, la forma de la señal y el espectro no cambian salvo por el factor G de ganancia del amplificador, pasando a ser

$$V_i'(t) = GV_i(t) \quad (2.28)$$

y

$$S_i'(\nu) = GS_i(\nu). \quad (2.29)$$

¹Debido a la limitación temporal de este curso nos restringiremos sólo al caso fundamental del receptor de potencia total.

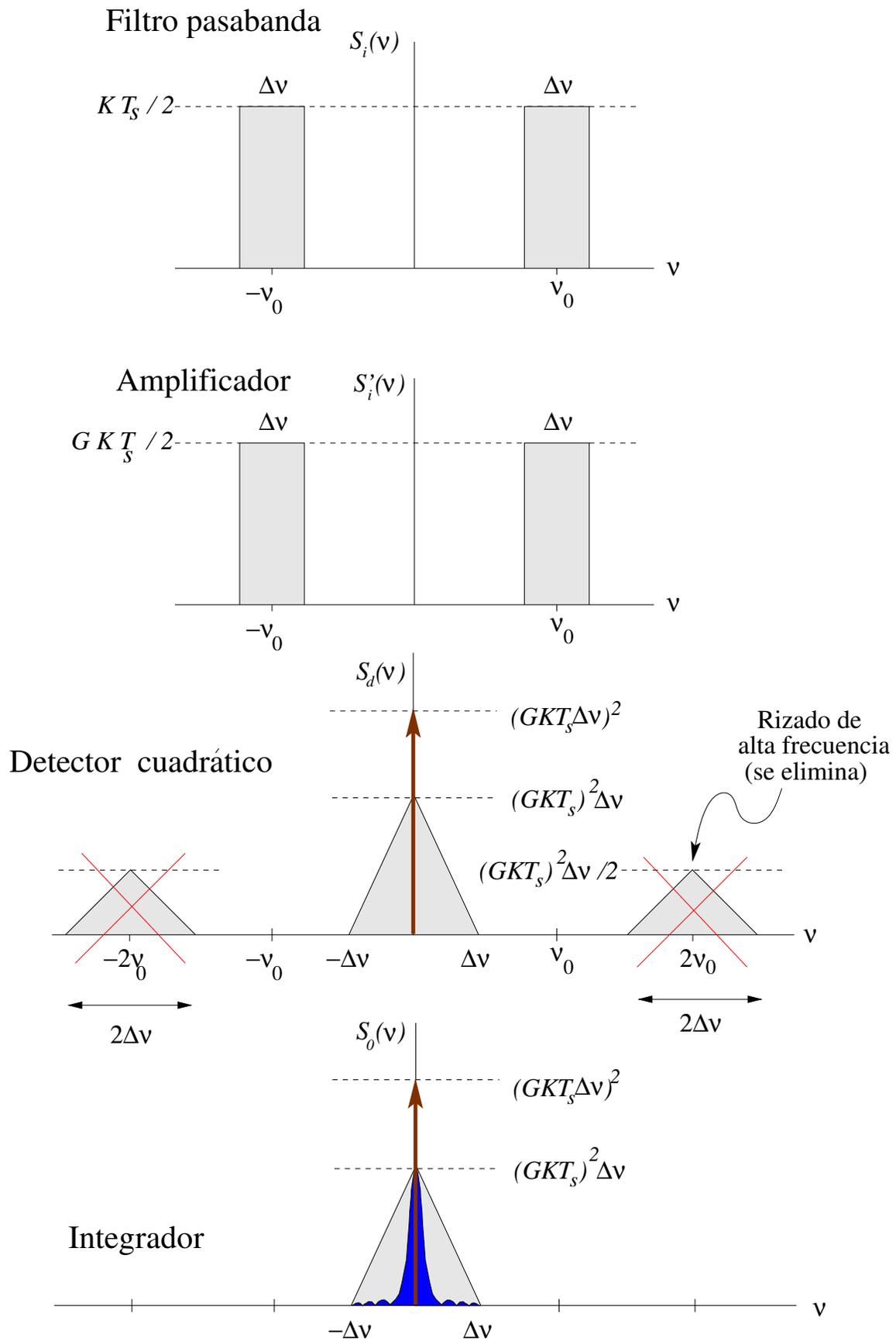


Figura 2.7: Espectro de frecuencias de la señal a su paso por las distintas etapas del receptor de potencia total.

En el detector cuadrático, la señal pasa a ser

$$V_d(t) = V_i'^2(t) \quad (2.30)$$

y su espectro de potencias $S_d(\nu)$ puede hallarse a partir de su función de autocorrelación y aplicando el teorema de Wiener-Kintchine. La función de autocorrelación de $V_d(t)$ será igual al valor esperado de:

$$R_d(\tau) = E[V_d(t+\tau)V_d(t)] = E[V_i'(t+\tau)V_i'(t+\tau)V_i'(t)V_i'(t)]$$

Su cálculo implica conocer el valor esperado del producto de cuatro variables aleatorias Gaussianas (momento de orden cuatro). Puede demostrarse que este producto se expresa como suma de valores esperados de productos dobles (momentos de orden dos). La demostración de este resultado se omite aquí por hallarse más allá de los objetivos de estos apuntes. Aplicando lo dicho:

$$R_d(\tau) = E[V_i'^2(t+\tau)]E[V_i'^2(t)] + (E[V_i'(t+\tau)V_i'(t)])^2 + (E[V_i'(t+\tau)V_i'(t)])^2 = R_i'^2(0) + 2R_i'^2(\tau)$$

Por el teorema de Wiener-Kintchine, la transformada de Fourier de $R_d(\tau)$ es el espectro de potencias que estamos buscando. Transformando la ecuación precedente, el término constante proporciona una delta de Dirac y el término con $R_i'^2(\tau)$ se expresa como un producto de convolución del espectro $S_i'(\nu)$ de V_i' :

$$S_d(\nu) = R_i'^2(0)\delta(\nu) + 2S_i'(\nu) * S_i'(\nu). \quad (2.31)$$

La delta del espectro indica la presencia de una componente continua y constante en la señal que hará que su valor medio no sea nulo. El resto de frecuencias donde el espectro es distinto de cero representan fluctuaciones de la señal en torno a ese valor constante. De hecho, el coeficiente de la delta es el valor esperado de $V_d(t)$ y viene dado por:

$$R_i'^2(0) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_i'(\nu) d\nu \right]^2 = [GKT_S \Delta\nu]^2 = m_d^2,$$

donde $m_d = E[V_d(t)]$.

Podemos también calcular la altura en el origen del triángulo de frecuencias de $S_d(\nu)$. centrado en $\nu = 0$ y de los triángulos en $\pm 2\nu_0$ (véase Fig. 2.7). La altura central será el doble de:

$$S_i' * S_i'(\nu = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i'^2(\nu) d\nu = \frac{1}{2}(GKT_S)^2 \Delta\nu.$$

Mientras que la altura de los triángulos menores en $\pm 2\nu_0$ es el doble de:

$$S'_i * S'_i (\nu = \pm 2\nu_0) = \dots = \frac{1}{4}(GKT_S)^2 \Delta\nu.$$

Los triángulos en $\pm 2\nu_0$ en la Fig. 2.7 representan un *rizado* de muy alta frecuencia que se elimina.

Sin considerar el *rizado*, la potencia total de la señal en el detector cuadrático se puede calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_d(\nu) d\nu = m_d^2 + \text{Area triangular central} = 2 [GKT_S \Delta\nu]^2.$$

Pero lo que más nos interesa de la señal $V_d(t)$ es su varianza para poder establecer la sensibilidad teórica del receptor de potencia total. Para una variable aleatoria, la varianza viene dada por:

$$\sigma_d^2 = E[(V_d(t) - m_d)^2] = E[V_d^2(t)] - E^2[V_d(t)] = R_d(0) - m_d^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_d(\nu) d\nu - m_d^2$$

y usando los resultados recién hallados

$$\sigma_d^2 = 2 [GKT_S \Delta\nu]^2 - [GKT_S \Delta\nu]^2 = [GKT_S \Delta\nu]^2. \quad (2.32)$$

La relación señal a ruido (*Signal-to-noise ratio*) en la etapa del detector cuadrático es

$$\text{SNR} = \frac{m_d}{\sigma_d} = \frac{GKT_S \Delta\nu}{GKT_S \Delta\nu} = 1,$$

lo cual es muy desfavorable para la detección de la señal original. Debe, por tanto, tratarse de disminuir la varianza para que la señal de valor medio pueda detectarse con más claridad, por ejemplo con SNR por encima de 4. Esto se logra precisamente en la etapa del integrador.

El integrador promedia la señal del detector cuadrático con una cierta constante de tiempo τ . Su salida viene dada por:

$$V_0(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t V_d(t') dt'. \quad (2.33)$$

Esto es equivalente a convolucionar $V_d(t)$ con una función rectángulo de valor $1/\tau$ para $0 \leq t \leq \tau$ y cero fuera de este intervalo. Designando por $h(t)$ a esta función rectángulo, podemos escribir:

$$V_0(t) = V_d(t) * h(t). \quad (2.34)$$

En general, $h(t)$ es la llamada respuesta impulsional del integrador y da la forma en que se *suavizaría* a su paso un impulso tipo delta de Dirac. Puesto que el producto de convolución es el producto de transformadas de Fourier, el espectro final de la señal integrada será:

$$S_0(\nu) = S_d(\nu) |H(\nu)|^2, \quad (2.35)$$

donde $H(\nu)$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional del integral. En el caso de un integrador ideal, esta función es un rectángulo como ya hemos comentado, y su transformada de Fourier una función sinc. El producto representado por la ecuación anterior se ilustran en color azul en el último panel de la Fig. 2.7. Junto a la componente constante representada por la delta de Dirac, esta región del espectro en azul corresponde a las únicas frecuencias con potencia distinta de cero que sobreviven en las distintas etapas del receptor de potencia total, pues la función sinc es prácticamente nula mucho más allá de $1/\tau$. Por supuesto τ debe ser mucho mayor que el tiempo característico de duración de un pulso de radiación ($\tau \gg 1/\Delta\nu$). Mencionaremos también que al tener la función sinc valor unidad en el origen, se preserva la componente continua representada por la delta de Dirac y el valor medio de la señal.

El espectro anterior puede ponerse entonces como:

$$S_0(\nu) = (GKT_S \Delta\nu)^2 \delta(\nu) + (GKT_S)^2 \Delta\nu |H(\nu)|^2, \quad (2.36)$$

donde se ha aproximado el triángulo central por el valor en el origen.

En esta etapa final, el valor esperado es $m_0^2 = (GKT_S \Delta\nu)^2$ mientras que la varianza

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(\nu) d\nu - m_0^2 = (GKT_S)^2 \Delta\nu \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu.$$

Aplicando el teorema de la potencia

$$\sigma_0^2 = (GKT_S)^2 \Delta\nu \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = (GKT_S)^2 \Delta\nu \frac{1}{\tau^2} \tau = (GKT_S)^2 \frac{\Delta\nu}{\tau},$$

donde la integral se calculado para la función rectángulo $h(t)$. No obstante, en general se define la constante de tiempo de un integrador como:

$$\tau \equiv \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt}. \quad (2.37)$$

En nuestro caso, la varianza del receptor de potencia total queda por fin:

$$\sigma_0 = GKT_S \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\tau}}. \quad (2.38)$$

Este resultado conduce ahora a una SNR de

$$\text{SNR} = \frac{m_0}{\sigma_0} = \sqrt{\Delta\nu \tau},$$

que crece con el tiempo de integración y el ancho de banda. Podemos plantearnos ahora a qué incremento de temperatura de antena o de m_0 equivale la varianza del receptor. Esta será la mínima temperatura de antena

detectable. ¿Cuándo será $\Delta m_0 = GK\Delta T_S = GK\Delta(T_A + T_N)\Delta\nu = \sigma_0$? Suponiendo constante la temperatura de ruido

$$\Delta m_0 = GK\Delta T_A\Delta\nu = GKT_S\sqrt{\frac{\Delta\nu}{\tau}},$$

de donde:

$$\Delta T_A = \frac{T_S}{\sqrt{\Delta\nu\tau}}. \quad (2.39)$$

Este es un resultado muy importante, no sólo para el caso sencillo que hemos considerado. Los receptores más complejos que el de potencia total siguen una dependencia de su sensibilidad muy similar a la obtenido. En general, cualquier otro tipo de receptor tiene una sensibilidad expresable mediante:

$$\Delta T_A = K_S \frac{T_S}{\sqrt{\Delta\nu\tau}}, \quad (2.40)$$

donde K_S es una constante propia del receptor y que puede ser mayor o menor que uno.

La dependencia de las dos ecuaciones precedentes podría haberse obtenido de manera mucho más intuitiva pensando en el carácter aleatorio Gaussiano de la señal obtenida y promediada por el receptor. Si el ancho de banda es $\Delta\nu$, la duración de un impulso del campo electromagnético es el inverso $1/\Delta\nu$. Si integramos durante τ segundos, el número de impulsos promediados será $\Delta\nu\tau$. Para una variable aleatoria Gaussiana como la temperatura de antena, el error probable debe disminuir con la raíz cuadrada del número de medidas promediadas, es decir:

$$\frac{\Delta T_A}{T_S} \sim \frac{1}{\sqrt{\tau\Delta\nu}},$$

$$\Delta T_A \sim \frac{T_S}{\sqrt{\tau\Delta\nu}}.$$

de donde resulta la misma dependencia funcional que en 2.39 y 2.40.

Para una fuente no resuelta, usando 2.16 la densidad de flujo mínima detectable correspondiente sería entonces

$$\Delta S_{\min} = \frac{2K}{A_e}\Delta T_A \quad (2.41)$$

donde, recordemos, en el área efectiva interviene el factor de eficiencia de la apertura.

2.5. Bancos de filtros

Si nos interesa hacer observaciones espectrales con capacidad para resolver líneas de emisión o absorción, la resolución en frecuencia de los receptores que hemos comentado hasta ahora suele ser claramente insuficiente puesto que sólo permiten una medida de la potencia recibida dentro de un ancho de banda $\Delta\nu$. Una solución a

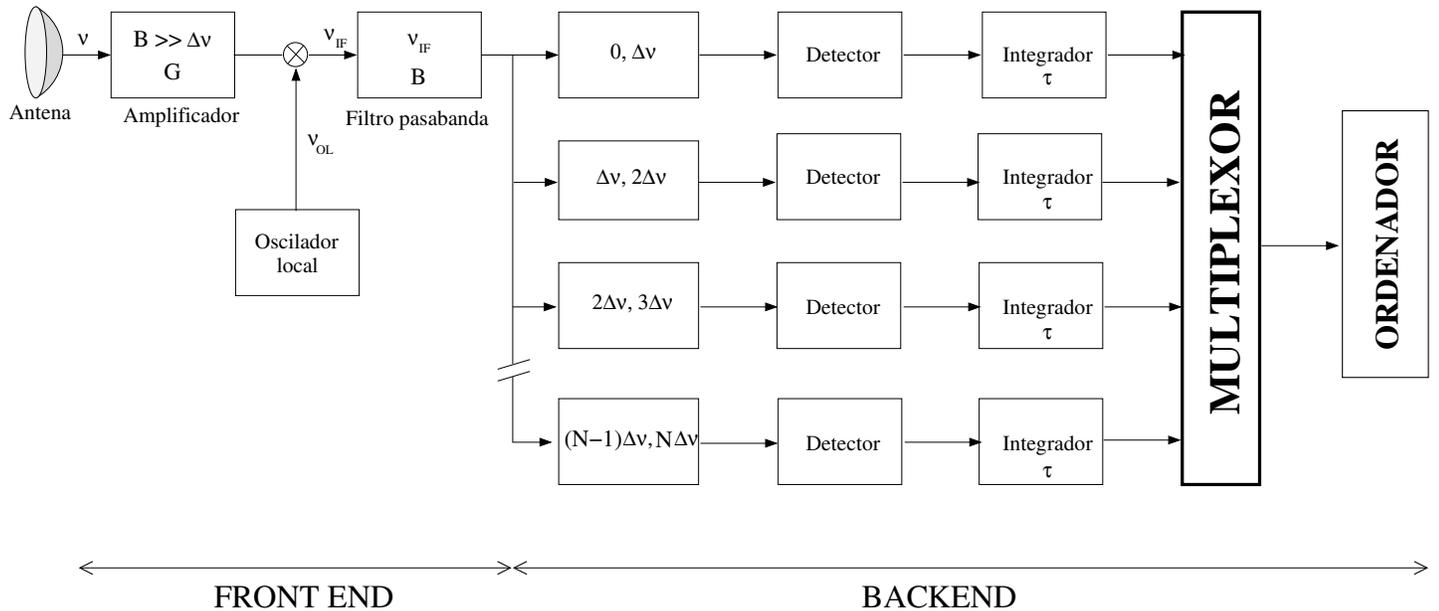


Figura 2.8: Esquema de un banco de filtros de anchura individual $\Delta\nu$ cubriendo un ancho de banda total B mucho mayor para observación espectral.

este problema, ilustrada en la Fig. 2.8, son los receptores agrupados en bancos de filtros. Cada uno de ellos es sensible dentro de un ancho de banda estrecho y ligeramente distinto que muestre todo el ancho de banda B de la frecuencia intermedia que resulta del mezclado de la señal con el oscilador local. A partir de la respuesta de cada uno de los N receptores, se puede reconstruir el espectro de la señal observada.

En el banco de filtros, la etapa inicial (*front end*) es común a todos los receptores individuales. La etapa de filtros y receptores individuales en sí (*back end*) debe cambiarse si se desea modificar la resolución espectral. Un banco de filtros típico podría tener por ejemplo 256 canales de 100 kHz de ancho de banda cada uno ($B = 25,6$ MHz).

Los inconvenientes del banco de filtros son que cada receptor puede tener una ganancia ligeramente distinta cuyas diferencias deben calibrarse adecuadamente. Tampoco es posible cambiar la resolución espectral a menos que se cambie todo el *back end* como ya se ha mencionado.

2.6. Receptores espectrales de autocorrelación

Para solventar algunos de los problemas anteriores, es muy frecuente construir receptores espectral basados en el principio de autocorrelación pues son mucho más flexibles que los bancos de filtros. En vez de estos, el componente principal del sistema es un autocorrelador como se ilustra en la Fig. 2.9. La idea básica aquí es

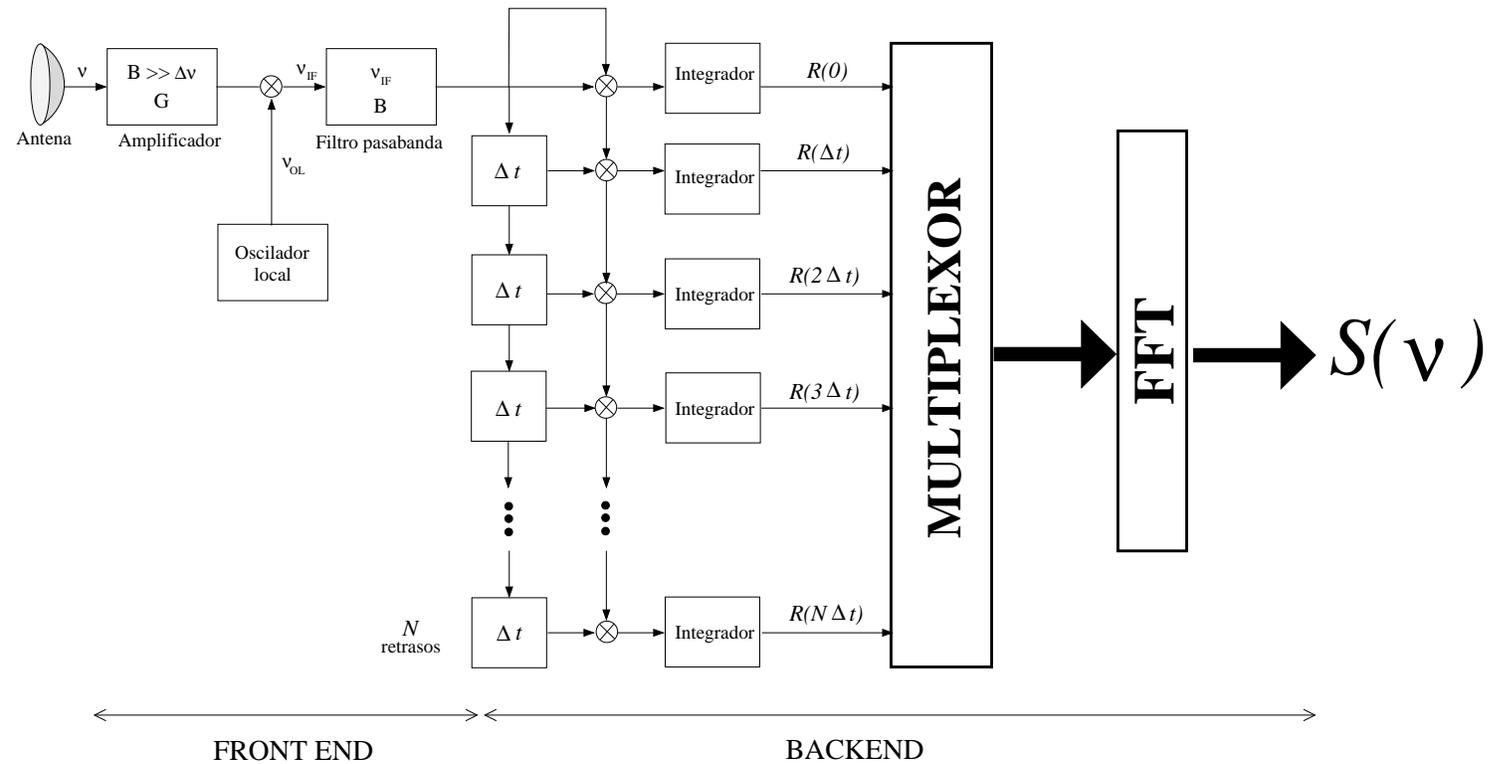


Figura 2.9: Esquema de un receptor espectral de autocorrelación. La frecuencia intermedia se suele bajar lo más posible de modo que el ancho de banda intermedio cubra desde cero hasta la frecuencia B .

que el espectro de la señal observada se puede obtener como la transformada de Fourier de su función de autocorrelación (teorema de Wiener-Kintchine).

El *front end* es el mismo que el de un banco de filtros. Sin embargo, ahora la señal se baja a la llamada banda vídeo (o *base band* en inglés) que va de 0 a una frecuencia máxima B . La frecuencia intermedia de la señal es, por tanto, de $B/2$. Para no perder información, esta señal cada $\Delta t \leq 1/(2B)$ de acuerdo con el ritmo de Nyquist. Para estimar luego la función de autocorrelación $R(\tau)$, la señal se someta a distintos retrasos y productos, promediándose estos con una cierta constante de tiempo. Las distintas estimaciones de $R(\tau)$ son posteriormente recogidas en un dispositivo electrónico llamado multiplexor que las prepara para su transformada de Fourier que nos dará el espectro $S(\nu)$.

Si los retrasos progresivos de la señal son de Δt , de acuerdo también con la frecuencia de Nyquist podremos conocer el espectro hasta una frecuencia máxima de $\nu_{\max} = 1/(2\Delta t)$. Si hay N retrasos, nuestra resolución espectral será de $\Delta\nu = 1/2N\Delta t$. La limitación del ancho de banda máximo permitido o de la resolución espectral deseada viene impuesto ahora por la capacidad de procesamiento del autocorrelador.

Otro problema de los receptores espectrales es que nuestro conocimiento de la función de autorcorrelación no es completo, sino hasta un retraso máximo $N\Delta t$. Por tanto, es como si conociéramos la función de autocorrelación real multiplicada por una función rectángulo que se anula a partir de ese retraso máximo. La transformada de

ese producto nos dará el espectro deseado pero convolucionado con la transformada de Fourier de la función rectángulo, que es una función sinc y tiene unos fuertes lóbulos secundarios. Este hecho limita bastante la resolución espectral pero hay técnicas que permiten mitigar un poco el problema (*Hanning smoothing*). En la bibliografía adjunta a estos apuntes se pueden consultar más detalles acerca de este tema.

Capítulo 3

Interferometría

3.1. Sistemas de coordenadas

Un interferómetro se obtendrá combinando las señales de dos o más antenas que observan una misma radiofuente en el cielo. Conviene, antes de entrar en materia, ver algunos de los sistemas de coordenadas que se emplean en la formulación de las ecuaciones básicas de la interferometría y que se representan en la Fig. 3.1. Muchos de los ángulos o coordenadas manejados se miden en relación con la dirección de observación del interferómetro, dada por el vector unitario \mathbf{s}_0 y que nos da la visual a la radiofuente. Con frecuencia, ésta será la llamada dirección del **centro de fase** por razones que veremos más adelante. También intervendrá el vector de posición de una antena respecto de otra, que será la llamada **línea de base** o vector \mathbf{B} . Su módulo es la distancia D que separa las dos antenas. La proyección de este vector sobre el plano perpendicular a la dirección del vector \mathbf{s}_0 también jugará un papel muy importante. Sobre este plano se define el sistema de ejes cartesianos uvw para expresar las componentes de esta proyección (ver de nuevo Fig. 3.1). El producto escalar $\mathbf{B}\mathbf{s}_0 = D \cos \psi$ es la proyección de la línea de base sobre la dirección a la radiofuente. El tiempo que emplea la luz en recorrer esta distancia $\tau_g = \mathbf{B}\mathbf{s}_0/c = (D \cos \psi)/c$, donde c representa la velocidad de la luz en el vacío, es el retraso geométrico entre la llegada de la radiación a una y otra antena para la dirección del centro de fase. Este retraso deberá tenerse en cuenta cuando las antenas no sean coplanarias sobre el plano perpendicular a \mathbf{s}_0 , lo cual será la situación habitual. El producto $c\tau_g$ coincide con la tercera componente w del vector \mathbf{B} .

Veamos ahora más detalles sobre los sistemas de coordenadas a manejar. Para visualizarlos con más claridad, recurramos a la Fig. 3.2. En esta figura, se presentan dos sistemas de coordenadas cartesianos. El sistema de ejes uvw se empleará para describir las proyecciones de las distintas líneas de base disponibles. Los valores numéricos de sus coordenadas se suelen medir en unidades de longitud de onda y se trata, por tanto, de números adimensionales. En ocasiones resultará más conveniente trabajar con distancias absolutas y para ello

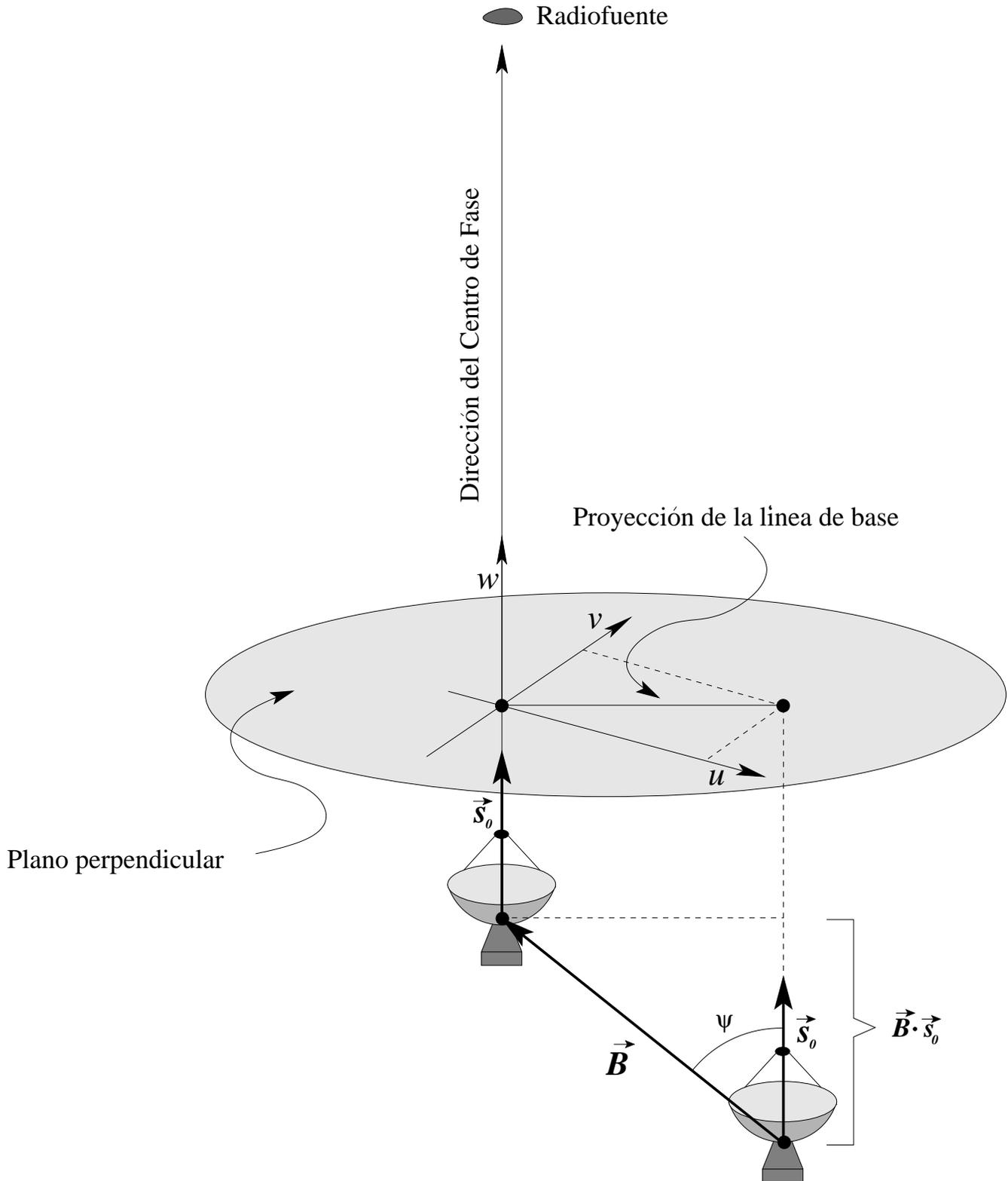


Figura 3.1: Ilustraciones de los conceptos básicos acerca de la disposición relativa de las dos antenas de un interferómetro elemental y la radiofuelle observada. En general, las antenas no serán coplanarias con el plano perpendicular a la dirección a la radiofuelle como se ha representado en la figura. Sobre este plano se introduce el sistema de ejes cartesianos uvw que expresan las componentes del vector línea de base que une a las dos antenas.

basta con multiplicar por la longitud de onda λ . El plano generado por los ejes uv es el mismo al que aludíamos en el párrafo anterior como perpendicular a la dirección de la radiofuente. Habitualmente, u se toma en la dirección de las ascensiones rectas crecientes y v en la dirección de las declinaciones crecientes.

En la misma Fig. 3.2, el sistema de ejes $\xi\eta\zeta$ está orientado según la dirección de observación a la radiofuente de nuestro interés. Los valores de las coordenadas para cualquier punto de la esfera celeste, como por ejemplo el punto P, representan geoméricamente los cosenos directores de ese punto con respecto a los ejes uvw siempre que supongamos la esfera celeste de radio unidad. Conviene tener clara esta idea para entender sin problema varios de los resultados que iremos viendo. Las coordenadas en los ejes $\xi\eta\zeta$ son también, por tanto, cantidades adimensionales.

Un elemento de ángulo sólido de la radiofuente, centrado en el punto P de la esfera celeste y con coordenadas (u, v, w) , se proyectaría sobre el plano uv con $u = \xi$, $v = \eta$ y $w = 0$. Esta proyección corresponde al elemento de superficie $d\xi d\eta$, que define una columna de sección cuadrada yendo desde $(u, v, 0)$ paralelamente a los ejes w y ζ . Esta columna forma un ángulo θ con la dirección a de estos ejes de modo tal que $\zeta = \cos \theta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$. La última igualdad resulta de aplicar el teorema de Pitágoras y considerar una esfera celeste de radio unidad. La intersección de la columna de sección cuadrada con la esfera celeste da origen a un elemento de superficie sobre la esfera cuya normal forma también un ángulo θ con la columna. El área de esta intersección es por tanto $d\xi d\eta / \cos \theta$. Recordando de nuevo que la esfera celeste se toma de radio unidad, este elemento de área intersección corresponderá a un ángulo sólido elemental dado por:

$$d\Omega = \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}. \quad (3.1)$$

3.2. Respuesta de un interferómetro

3.2.1. Interferómetros aditivos

El principio del interferómetro aditivo, en el que se suman las señales de dos antenas, se empleó con éxito en la radioastronomía de mediados del siglo XX. Tiene además un fuerte interés didáctico que justifica que lo veamos con un mínimo detalle.

Como se ilustra en la Fig. 3.3, podemos suponer el interferómetro aditivo como una antena con dos partes no contiguas que en la práctica serán las dos antenas individuales en los extremos de la línea de base de longitud D . Sea $E_0(x, y)$ la amplitud del campo eléctrico con que se 'ilumina' una antena individual. El campo de las dos antenas puede escribirse mediante deltas de Dirac como:

$$E(x, y) = E_0(x, y) * \left[\delta \left(x + \frac{D}{2\lambda}, 0 \right) + \delta \left(x - \frac{D}{2\lambda}, 0 \right) \right]. \quad (3.2)$$

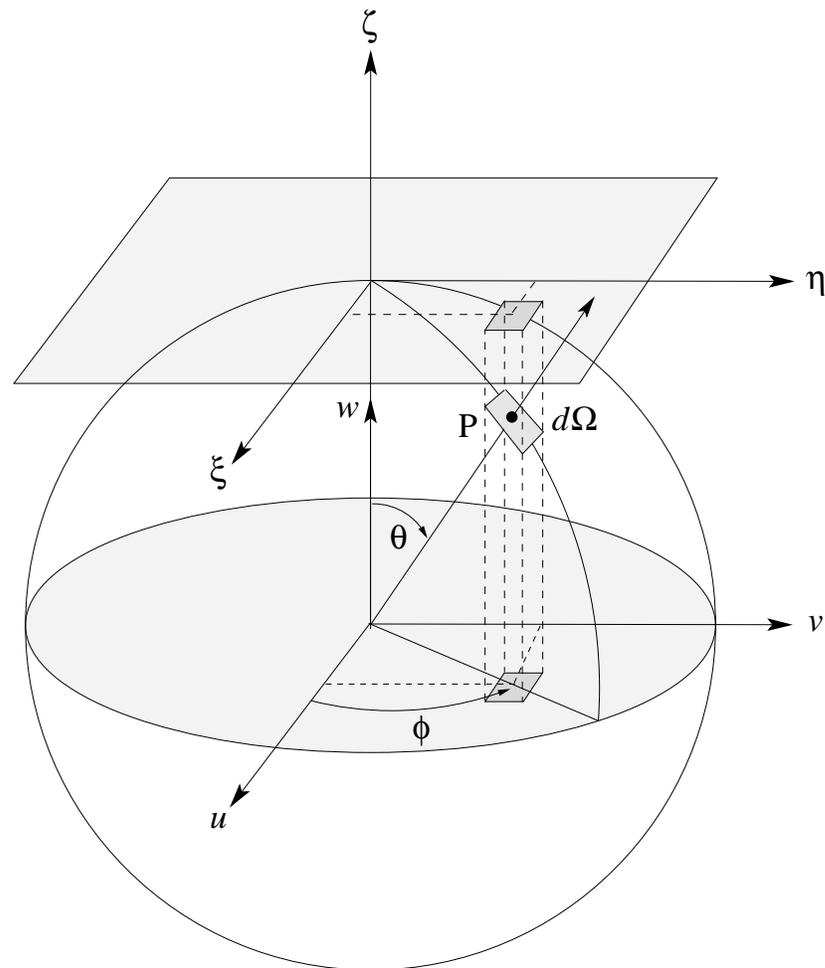


Figura 3.2: Ejes de coordenadas (u, v, w) y (ξ, η, ζ) empleados en las ecuaciones de la interferometría. El tercer eje de los dos sistemas cartesianos aquí representados se supone en dirección a la radiofuente observada por el interferómetro situado en el centro de la esfera celeste.

De acuerdo con la teoría de antenas que hemos visto, el campo de radiación del interferómetro será la transformada de Fourier de 3.2:

$$E_R(\xi, \eta) = E_{R,0}(\xi, \eta) \left[e^{i2\pi D\xi/2\lambda} + e^{-i2\pi D\xi/2\lambda} \right] = 2E_{R,0}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{2\pi D\xi}{2\lambda} \right]. \quad (3.3)$$

Recordemos aquí que las coordenadas (ξ, η) son los cosenos directores de la visual a la radiofuente en el cielo respecto del centro de fase del interferómetro. La Fig. 3.3 se ha representado de modo que esta dirección coincide con el cenit del lugar. Elevando al cuadrado para obtener el diagrama de radiación

$$P(\xi, \eta) = 4P_0(\xi, \eta) \cos^2 \left[\frac{2\pi D\xi}{2\lambda} \right],$$

donde $P_0(\xi, \eta)$ es el diagrama de radiación de una antena individual (supuestas las dos iguales). Usando la identidad trigonométrica del coseno al cuadrado del ángulo mitad, terminamos escribiendo:

$$P(\xi, \eta) = 2P_0(\xi, \eta) \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi D\xi}{\lambda} \right] \right]. \quad (3.4)$$

El diagrama de radiación resultante es el de una antena única modulado por las franjas del factor multiplicativo uno más coseno del argumento $2\pi D\xi/\lambda$. Este argumento se conoce también como la fase de las franjas. Teniendo en cuenta que ξ es el coseno director del ángulo ψ entre la radiofuente y la línea de base, la fase de las franjas se puede escribir también como $2\pi D \cos \psi/\lambda$. Esta fase se puede poner también como $2\pi\nu\tau_g$, donde $\tau_g = D \cos \psi/c$ no es otra cosa que el retraso en el tiempo de llegada de la radiación a cada antena. Tendremos ocasión de visualizar mejor este concepto en la siguiente sección,

La separación $\Delta\psi$ entre las franjas será un ángulo tal que este argumento se incremente en 2π radianes. Incrementando tendremos $(2\pi D/\lambda) \sin \psi \Delta\psi = 2\pi$, de donde:

$$\Delta\psi = \frac{\lambda}{D \sin \psi}. \quad (3.5)$$

En la Fig. 3.4 podemos ver un ejemplo del diagrama de radiación de un interferómetro aditivo, equivalente a lo que se observaría cuando una fuente intensa transita frente al instrumento ($\psi \simeq 90^\circ$).

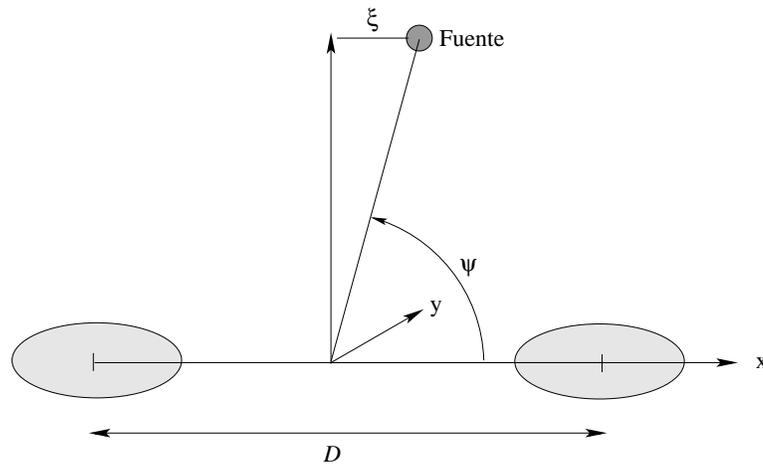


Figura 3.3: Disposición de las dos antenas en un interferómetro aditivo con línea de base de longitud D . La dirección de una radiofuente puntual forma un ángulo ψ con la línea de base y tendremos que $\xi = \cos \psi$.

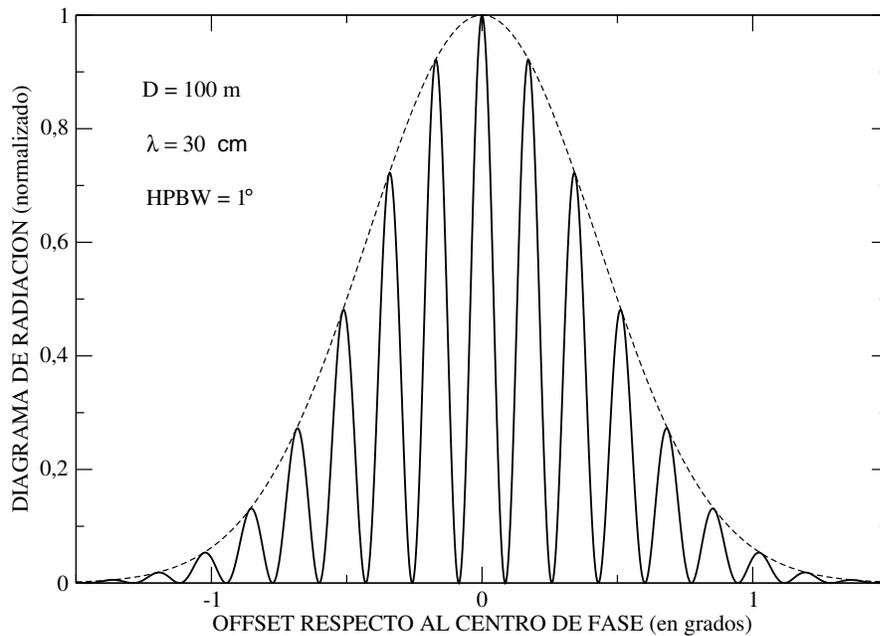


Figura 3.4: Aspecto del diagrama de radiación de un interferómetro aditivo cortado según la dirección paralela a la línea de base. En este ejemplo se ha tomado una longitud de onda de 30 cm, una línea de base de 100 m y antenas individuales con haz gaussiano de anchura a potencia mitad 1.5 grados. La separación $\Delta\psi$ de las franjas es del orden de 10 minutos de arco. La línea a trazos corresponde al haz de una antena individual.

3.2.2. Interferómetros multiplicativos

Para comprender el funcionamiento básico de un interferómetro multiplicativo, supongamos las dos antenas de la Figura 3.5 que reciben radiación electromagnética monocromática de frecuencia ν procedente de una fuente puntual en una cierta dirección. Los voltajes inducidos en las terminales de cada antena en función del tiempo t serán proporcionales a la amplitud del campo eléctrico E de la onda plana recibida de la fuente puntual, esto es, de la forma:

$$U_1 \propto E \cos 2\pi\nu t$$

$$U_2 \propto E \cos 2\pi\nu(t - \tau_g)$$

donde $\tau_g = D \cos \psi / \lambda$ es el retraso geométrico al que aludíamos en la sección anterior.

En este tipo de interferómetro, la señales de cada línea de base se multiplican y promedian en el tiempo. Esta claro que el promedio del producto de una función por sí misma con un cierto desplazamiento de la variable independiente, τ_g en nuestro caso, no es otra cosa que la función de autocorrelación. Por este motivo, a los interferómetros multiplicativos se les conoce también como interferómetros de correlación. De hecho, nos referiremos habitualmente al conjunto de multiplicador e integrador como el **correlador**.

Designemos por $R(\tau_g)$ a la función de autocorrelación. Podemos escribirla como:

$$R(\tau_g) \propto \frac{E^2}{T} \int_0^T \cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\nu(t - \tau_g) dt.$$

Donde T es habitualmente mucho mayor que el período de una oscilación del campo ($T \gg 1/\nu$). No obstante, para hacer el cálculo teórico supondremos que T es exactamente este período lo cual no cambia el sentido el sentido físico de la integral. Usando la identidad trigonométrica del coseno de la suma:

$$R(\tau_g) \propto \frac{E^2}{2T} \int_0^T \cos 2\pi\nu t [\cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\nu\tau_g + \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu\tau_g] dt$$

$$R(\tau_g) \propto \frac{E^2}{2T} \left[\cos 2\pi\nu\tau_g \int_0^T \cos^2 2\pi\nu t dt + \sin 2\pi\nu\tau_g \int_0^T \cos 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu t dt \right].$$

La primera integral proporciona una constante que se añadiría al factor de proporcionalidad. La segunda integral es nula por tratarse de una función impar. La dependencia relevante del resultado es entonces:

$$R(\tau_g) \propto \frac{1}{2} E^2 \cos 2\pi\nu\tau_g.$$

Por otro lado, la amplitud de la respuesta del correlador aumentará linealmente con la potencia recibida por las antenas que es proporcional a su superficie colectora. Suponiendo, para simplificar, que todas las antenas iguales con el mismo diagrama de radiación:

$$R(\tau_g) \propto A_e P_n \cos 2\pi\nu\tau_g. \quad (3.6)$$

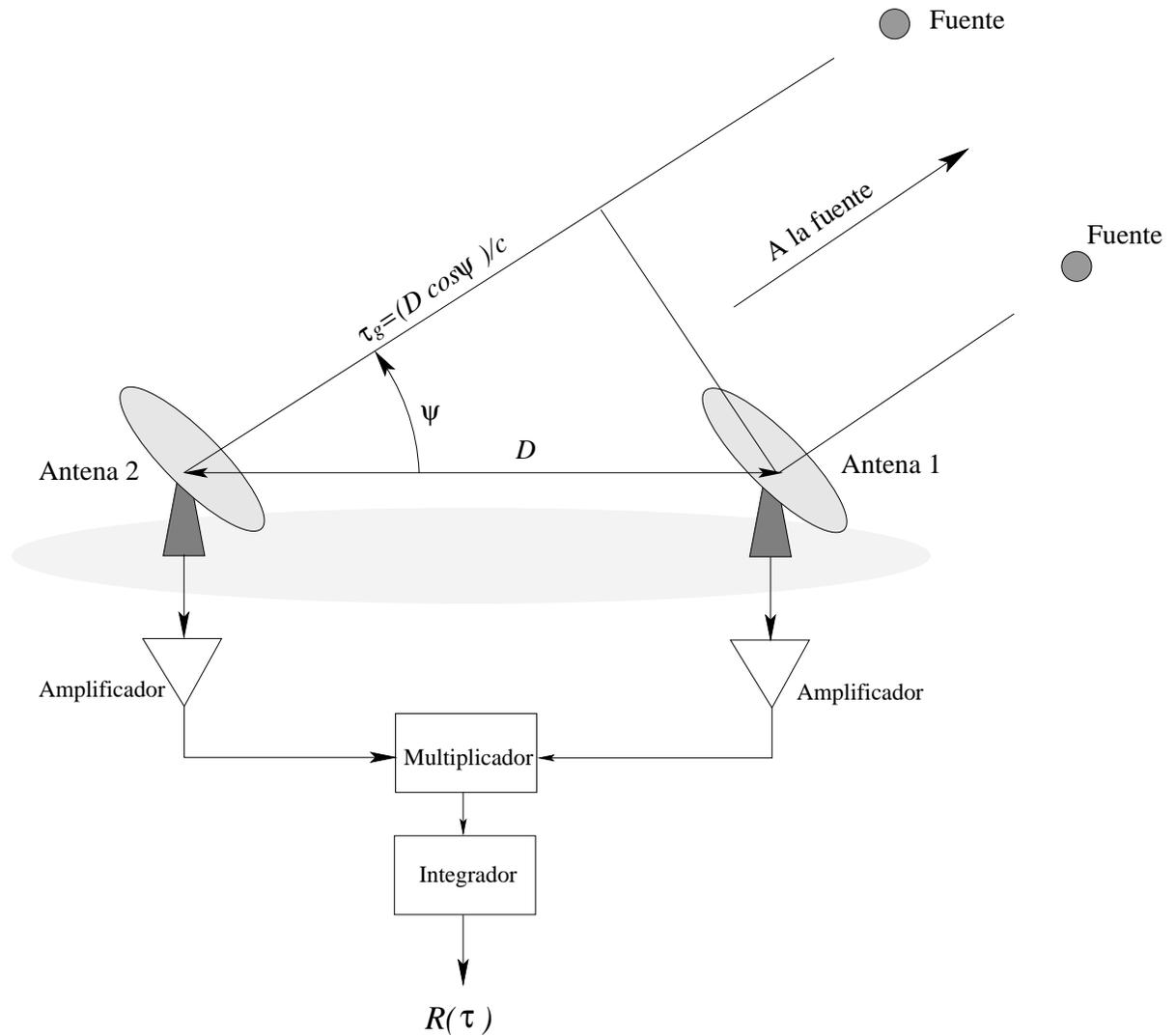


Figura 3.5: Disposición de las dos antenas en un interferómetro multiplicativo con línea de base de longitud D . La dirección de una radiofuente puntual forma un ángulo ψ con la línea de base y aquí también tendríamos que $\xi = \cos \psi$.

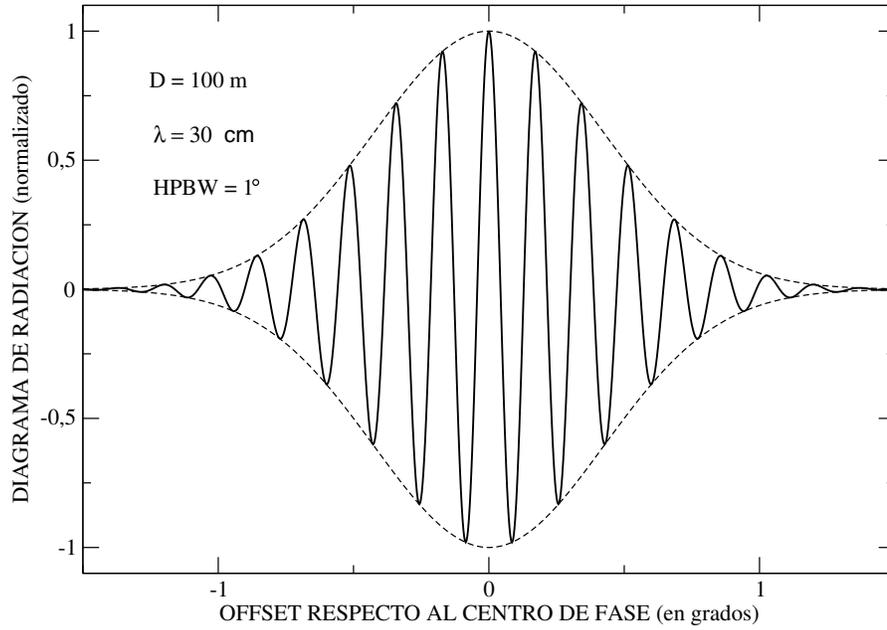


Figura 3.6: Aspecto del diagrama de radiación de un interferómetro multiplicativo cortado según paralelamente a la proyección de la línea de base sobre el plano perpendicular a la dirección de la radiofuerza. En este ejemplo se ha tomado también una longitud de onda de 30 cm, una línea de base de 100 m y antenas individuales con haz gaussiano de anchura a potencia mitad 1.5 grados. La separación $\Delta\psi$ de las franjas es de nuevo del orden de 10 minutos de arco. Las líneas a trazos corresponden a la atenuación de la respuesta del correlador debido al haz de las antenas individuales.

Vemos entonces que la salida del correlador varía periódicamente con τ_g , el retraso geométrico de la línea de base que une a las dos antenas. Este retraso irá cambiando debido a la rotación de la Tierra y a la distinta orientación que la línea de base va adquiriendo en relación con la radiofuerza, cambiando por tanto los valores de $R(\tau_g)$.

Dado que la respuesta expresada por la ecuación 3.6 se ha obtenido para una fuente puntual, ésta es también la forma del diagrama de radiación del interferómetro de dos antenas. Recordando que $\tau_g = D \cos \psi / c$, podemos pasar a visualizar mejor este diagrama de radiación empleando los mismos parámetros que se usaron en el caso aditivo. El resultado se muestra en la Figura 3.6.

3.2.3. Caso de señal no monocromática en el interferómetro multiplicativo

Hasta ahora hemos considerado que la señal recibida era estrictamente monocromática. En realidad, esto no será así y nuestras antenas y receptores son sensibles dentro de un cierto ancho de banda en frecuencia $\Delta\nu$, que supondremos rectangular para simplificar, centrado en una cierta frecuencia ν_0 . Por parte de cada intervalo diferencial de frecuencia $d\nu$, su contribución tras el paso de la señal por el correlador y el integrador será de la forma:

$$dR(\tau_g) \propto A_e P_n \cos 2\pi\nu\tau_g d\nu$$

y la salida resultante en el correlador se obtendrá integrando las distintas contribuciones diferenciales para todo el ancho de banda, esto es:

$$R(\tau_g) \propto \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} A_e P_n \cos 2\pi\nu\tau_g d\nu.$$

Integrando,

$$R(\tau_g) \propto A_e P_n \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \cos 2\pi\nu\tau_g d\nu$$

$$R(\tau_g) \propto A_e P_n \left[\frac{\sin 2\pi\nu\tau_g}{2\pi\tau_g} \right]_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2}.$$

Empleando las fórmulas del seno de la suma para evaluar esta integral definida, se obtiene sin dificultad que:

$$R(\tau_g) \propto A_e P_n \left[\frac{\sin \pi \Delta\nu \tau_g}{\pi \Delta\nu \tau_g} \right] \cos 2\pi\nu_0 \tau_g. \quad (3.7)$$

Este resultado nos dice que el caracter no monocromático de la radiación altera la salida del correlador, expresada antes por la ecuación 3.6, modulándola con una función *sinc*. A fin de que las franjas del interferómetro tengan su máxima amplitud, con la envolvente *sinc* cercana a la unidad, es necesario mantener $\Delta\nu \ll 1/\tau_g$. En la Fig. 3.7 se muestran los efectos del ancho de banda no monocromático en el diagrama de radiación.

3.2.4. Respuesta de un interferómetro a una fuente extensa

Suponiendo garantizado que $\Delta\nu \ll 1/\tau_g$ para evitar que disminuya la amplitud en la respuesta del correlador, pasemos ahora a considerar el caso de una fuente extensa observada mediante un interferómetro de dos antenas. Si la fuente que nos ocupa ya no es puntual, esta tendrá una cierta distribución de intensidad específica $I(\xi, \eta)$ que es la incógnita del problema. Sus distintos elementos de ángulo sólido $d\Omega$ sobre la esfera celeste vendrán situados, en general, por un vector \mathbf{s} tal que

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma},$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector de componentes $[\xi, \eta, \zeta]$, con $|\boldsymbol{\sigma}| \ll 1$ en general y prácticamente tangente a la esfera celeste. En la Fig. 3.8 se muestra la disposición de estos vectores exagerando enormemente la escala para más claridad.

Cada elemento $d\Omega$ de la fuente contribuirá a la respuesta del correlador en una cantidad infinitesimal dR con la dependencia hallada en la ecuación 3.7 y proporcionalmente a su densidad de flujo $I(\xi, \eta)d\Omega$. Tomando el factor *sinc* unidad y trabajando en lo sucesivo con la frecuencia central ν_0 del ancho de banda, tendremos que:

$$dR = P_n(\xi, \eta) I(\xi, \eta) \cos [2\pi\nu_0\tau_g] d\Omega.$$

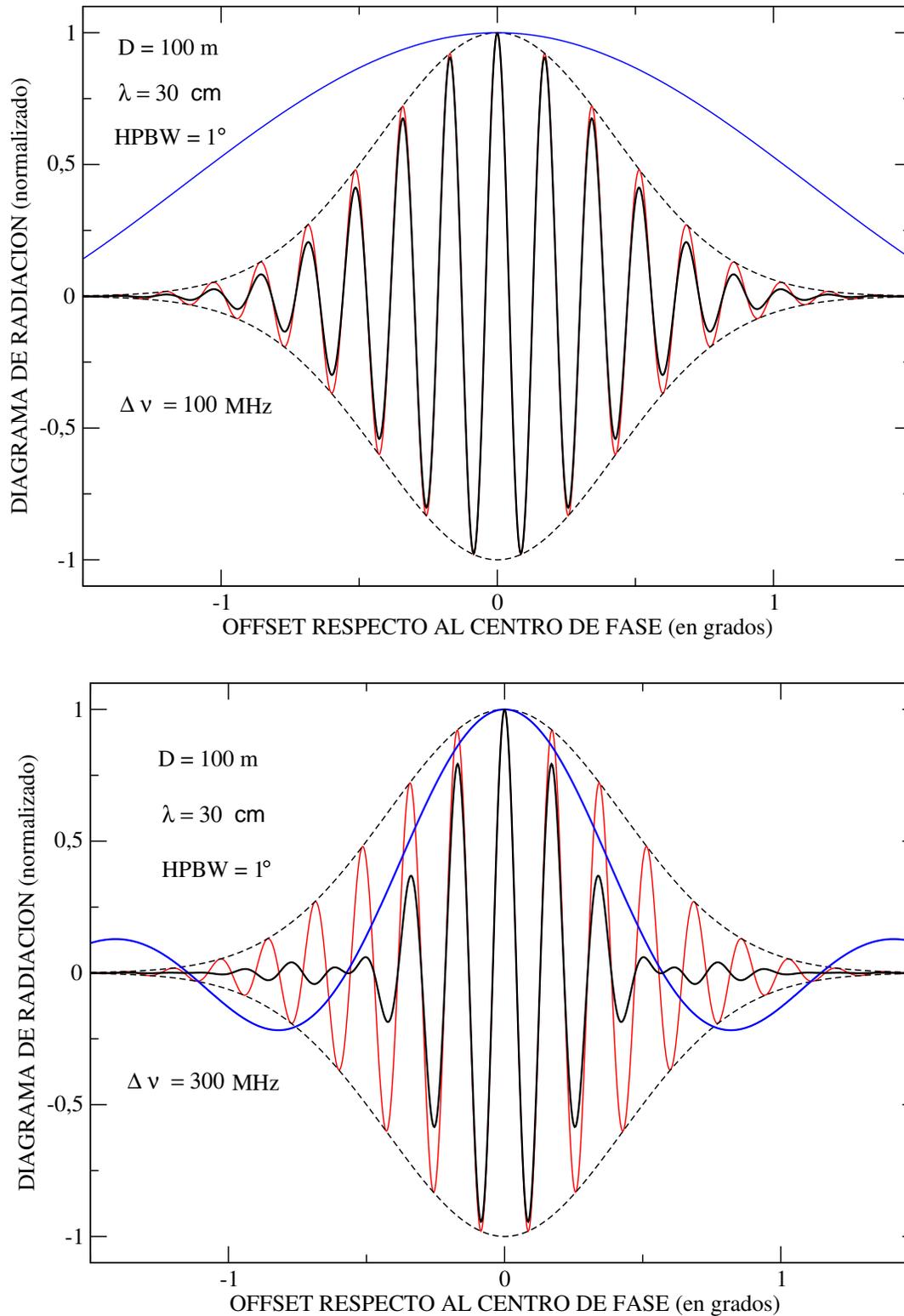


Figura 3.7: Diagrama de radiación de un interferómetro multiplicativo (en línea negra) para distintos valores del ancho de banda del receptor, $\Delta \nu = 100$ MHz (arriba) y $\Delta \nu = 300$ MHz (abajo). Los demás parámetros se han conservado igual a los casos anteriores. En azul se muestra en ambos paneles la modulación en forma de función *sinc* debida al carácter no monocromático de la señal. En rojo se muestra la respuesta del correlador afectada sólo de la caída del haz primario de las antenas (línea a trazos).

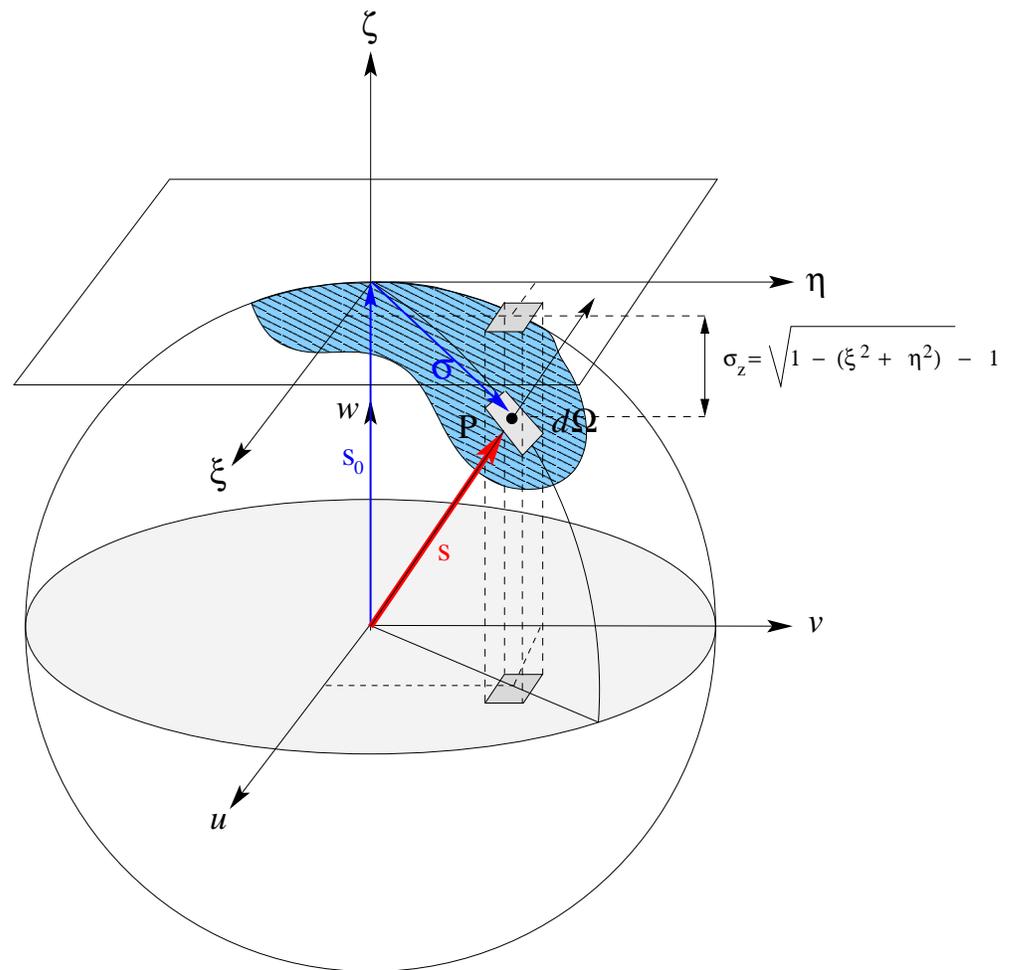


Figura 3.8: Ejes de coordenadas (u, v, w) y (ξ, η, ζ) iguales a los de la Fig. 3.2 pero incluyendo los vectores \mathbf{s} , \mathbf{s}_0 y $\boldsymbol{\sigma}$. A una escala más realista, tendríamos que $|\boldsymbol{\sigma}| \ll 1$ y este vector sería cuasi tangente a la esfera celeste. La radiofente a observar se ha representado en color azul.

Es importante aclarar que hemos cambiado el símbolo de proporcionalidad por una igualdad estricta, omitido el área eficaz, e introducido $I(\xi, \eta)$ de forma explícita. Prescindir de constantes multiplicativas es perfectamente lícito si la amplitud instrumental de R se calibra en algún momento observando una fuente de densidad de flujo conocida (calibrador de amplitud).

Recordando que:

$$\tau_g = \mathbf{B}\mathbf{s}/c = \mathbf{B}(\mathbf{s}_0 + \sigma)/c = (\mathbf{B}\mathbf{s}_0 + \mathbf{B}\sigma)/c,$$

con lo que el coseno presente en dR puede ponerse como el coseno de una suma

$$dR = P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \cos [2\pi\nu_0(\mathbf{B}\mathbf{s}_0 + \mathbf{B}\sigma)/c]d\Omega.$$

Desarrollando el coseno de la suma,

$$\begin{aligned} dR &= P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \cos [2\pi\nu_0\mathbf{B}\mathbf{s}_0/c] \cos [2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma/c]d\Omega \\ &\quad - P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \sin [2\pi\nu_0\mathbf{B}\mathbf{s}_0/c] \sin [2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma/c]d\Omega. \end{aligned}$$

Integrado, la respuesta del correlador a la fuente extensa será:

$$\begin{aligned} R &= \cos \left[\frac{2\pi\nu_0\mathbf{B}\mathbf{s}_0}{c} \right] \int_S P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \cos \left[\frac{2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma}{c} \right] d\Omega \\ &\quad - \sin \left[\frac{2\pi\nu_0\mathbf{B}\mathbf{s}_0}{c} \right] \int_S P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \sin \left[\frac{2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma}{c} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Llegados a este punto, es conveniente definir el concepto de **Visibilidad**. Se trata por ahora de una magnitud compleja, es decir con **amplitud** y **fase**. Su significado físico quedará claro en la siguiente sección, cuando descubriremos que está asociada a la correlación del campo eléctrico entre dos puntos del espacio. Por ahora, introducimos la visibilidad de la siguiente manera:

$$V \equiv |V|e^{i\phi} = \int_S P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta)e^{-i2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma/c}d\Omega. \quad (3.9)$$

Esta definición, nos permite reconocer en los términos de la ecuación 3.8 a la parte real y a la parte imaginaria de V , esto es:

$$|V| \cos \phi_V = + \int_S P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) \cos \left[\frac{2\pi\nu_0\mathbf{B}\sigma}{c} \right] d\Omega, \quad (3.10)$$

$$|V| \sin \phi_V = - \int_S P_n(\xi, \eta) I(\xi, \eta) \sin \left[\frac{2\pi\nu_0 \mathbf{B}\sigma}{c} \right] d\Omega, \quad (3.11)$$

Con esta notación, la respuesta del correlador de la ecuación 3.8 queda escrita así:

$$R = \cos \left(\frac{2\pi\nu_0 \mathbf{B}\mathbf{s}_0}{c} \right) |V| \cos \phi_V + \sin \left(\frac{2\pi\nu_0 \mathbf{B}\mathbf{s}_0}{c} \right) |V| \sin \phi_V, \quad (3.12)$$

y aplicando la fórmula del coseno de la diferencia

$$R = |V| \cos \left(\frac{2\pi\nu_0 \mathbf{B}\mathbf{s}_0}{c} - \phi_V \right). \quad (3.13)$$

Este resultado nos dice que la salida del correlador contiene información sobre la amplitud y la fase de esta magnitud compleja llamada visibilidad. Nos queda aún pendiente averiguar qué relación tiene V con la incógnita de nuestro problema que no olvidemos es la distribución de brillo de la fuente extensa $I(\xi, \eta)$.

3.3. La visibilidad como transformada de Fourier

La visibilidad que hemos introducido en 3.9 se asemeja a la expresión habitual de una transformada de Fourier de la distribución de brillo de la fuente que nos interesa. Sin embargo, no tenemos ninguna garantía aún de que sea tal cosa ni de que pueda gozar de las propiedades bien conocidas de esta transformación. Para ver bajo qué condiciones podemos considerar a V como una transformada de Fourier de $I(\xi, \eta)$, debemos estudiar un poco más a fondo la definición de V . Partiendo de 3.9, escribiremos de forma explícita el producto escalar $\mathbf{B}\sigma$ que aparece en el exponente complejo. Para ello, es conveniente que tengamos claras cuáles son las componentes en sus respectivos ejes de todos los vectores que intervienen. Estas son:

$$\mathbf{B} = \lambda_0(u, v, w),$$

donde estamos considerando que uvw se expresan en unidades de la longitud de onda central del ancho de banda del receptor $\lambda_0 = c/\nu_0$. En cuanto al vector σ ,

$$\sigma = (\xi, \eta, \zeta) = (\xi, \eta, \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - 1).$$

La última igualdad se puede entender usando el teorema de Pitágoras sobre la Fig. 3.8, puesto que σ es un vector cuyo extremo se halla sobre la esfera celeste y debe tener tercera componente negativa. Por lo tanto, el producto escalar que tenemos valdrá:

$$\mathbf{B}\sigma = \lambda_0 \left[u\xi + v\eta + w(\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - 1) \right].$$

Con ello, y empleando la expresión del elemento de ángulo sólido según 3.1, podemos describir la visibilidad de 3.9 con más detalle como:

$$V(u, v, w) = \int_S P_n(\xi, \eta) I(\xi, \eta) e^{-i2\pi [u\xi + v\eta + w(\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - 1)]} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}. \quad (3.14)$$

Obviamente en este resultado ha habido una cancelación del factor $\lambda_0 = c/\nu_0$ del exponente.

A continuación es necesario permitirnos algunas aproximaciones para hacer uso de 3.14 en la práctica. En primer lugar, el integrando se considerará cero para $\xi^2 + \eta^2 \geq 1$ a fin de evitar problemas con la raíz cuadrada. Esto no debe plantear demasiado inconveniente pues las fuentes reales suelen ocupar una región no muy grande del plano $\xi\eta$. Teniendo en cuenta además que el haz primario de las antenas $P_n(\xi, \eta)$ suele decrecer exponencialmente para ángulos mucho mayores que θ_{HPBW} , a lo sumo de pocos grados habitualmente, extenderemos los intervalos de integración a $\pm\infty$ sin cometer error apreciable. Con todo ello, podemos reescribir 3.14 como:

$$V(u, v, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(\xi, \eta) I(\xi, \eta) e^{-i2\pi [u\xi + v\eta + w(\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - 1)]} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad (3.15)$$

Lo cual sigue sin ser una transformada de Fourier salvo que tuviéramos líneas de base todas ellas coplanarias con $w = 0$. El caso más sencilla para el que podemos considerar 3.15 como una transformada de Fourier es la llamada **aproximación de campo pequeño**, que suele ser apropiada en buena parte de las observaciones radiointerferométricas. Si el campo a cartografiar cumple que ξ, η son ambos mucho menores que la unidad en todos sus puntos, el término de la raíz cuadrada deviene entonces despreciable debido a la pequeñez de los términos cuadráticos frente a los lineales. En efecto,

$$w \left[\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - 1 \right] \simeq \frac{1}{2} w (\xi^2 + \eta^2) \simeq 0.$$

Igualmente, la raíz cuadrada del denominador de $d\Omega$ es prácticamente la unidad. En estas condiciones, para $|\xi^2 + \eta^2| \ll 1$, la dependencia de la visibilidad en la coordenada w desaparece felizmente y podemos escribir por fin:

$$V(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(\xi, \eta) I(\xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.16)$$

Esta sí es una relación de auténtica transformada de Fourier entre la distribución de brillo, por desgracia multiplicada por el haz primario pero esto no resultará demasiado grave, y la función de visibilidad. La transformación inversa, según Fourier, vendría dada por:

$$P_n(\xi, \eta)I(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(u, v)e^{+i2\pi(u\xi+vn)} dudv. \quad (3.17)$$

En rigor la condición para que 3.16 sea válido es que $|\pi w(\xi^2 + \eta^2)| \ll 1$ y no sólo que $|\xi^2 + \eta^2| \ll 1$. Para una cierta línea de base, el valor máximo de w es la distancia D entre antenas que se da cuando la fuente se halla cerca del horizonte en la dirección de \mathbf{B} . La resolución angular del interferómetro, cuyo haz sintetizado tendrá un cierto θ_{HPBW}^1 , es entonces $\theta_{HPBW} \simeq \lambda/D \simeq 1/w_{\max}$. Luego $w_{\max} \simeq 1/\theta_{HPBW}$. Sea ahora θ_F el tamaño del campo que podemos cartografiar, alejándonos $\theta_F/2$ del centro de fase. El error máximo en fase debido a la dependencia en w se puede expresar como:

$$\pi w_{\max}(\xi^2 + \eta^2) = \pi \frac{\theta_F^2}{4\theta_{HPBW}} \leq \frac{1}{10},$$

que hemos impuesto debe ser menor que una décima de radián.

El máximo campo cartografiable se puede poner entonces como:

$$\theta_F \leq \sqrt{\frac{2\theta_{HPBW}}{5\pi}},$$

que aproximadamente nos da:

$$\theta_F \leq \frac{1}{3}\sqrt{\theta_{HPBW}}. \quad (3.18)$$

Por ejemplo, con un interferómetro que sintetizara un haz con $\theta_{HPBW} = 1'' = 1/206265$ rad, el campo máximo sería de $\theta_F \leq 1/3\sqrt{206265}$ rad equivalente a $2'.5$. No obstante, es factible trabajar con campos mayores pero a costa de algoritmos de inversión más complejos que una simple transformada de Fourier.

3.4. Líneas de base y exploración del plano uv

Vemos en 3.16 que la relación de transformada de Fourier de la visibilidad involucra de un lado el plano imagen, con coordenadas (ξ, η) , y de otro lado el plano de coordenadas (u, v) conjugado del anterior. A medida que la Tierra rota en el espacio, las componentes del vector línea de base iran cambiando y el interferómetro irá explorando distintos valores de la transformada de Fourier de la distribución de brillo sobre el plano uv . Esta exploración será mejor si tenemos más de dos antenas como estamos suponiendo hasta ahora. Dadas N antenas, el número de líneas de base independientes es $N(N-1)/2$. Una vez obtenida toda la información posible sobre el plano uv , esto es todos los valores de la función de visibilidad $V(u, v)$ explorados durante la duración de la observación, debemos agruparlos y tratar de invertir la transformada tal como se expresa en 3.17. Este proceso en la práctica lo comentaremos más adelante.

¹A no confundir con el ancho a potencia mitad del haz primario de las antenas.

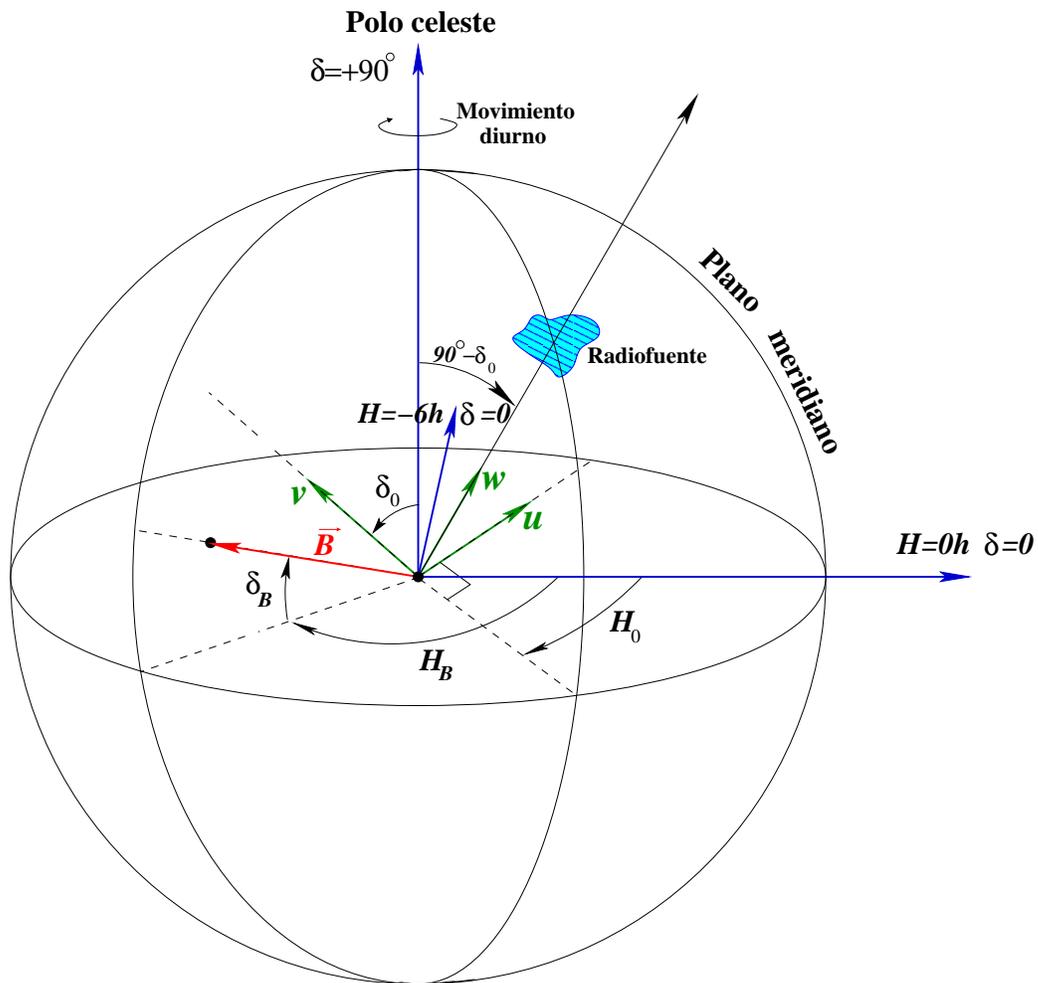


Figura 3.9: Figura del interferómetro en el contexto de la esfera celeste. Los ejes XYZ en azul están muy relacionados con las coordenadas horarias propias del observador, supuesto situado en una de las antenas. Su elección se detalla en el texto. Se indican en rojo la dirección del vector línea de base hacia la otra antena, especificada por su declinación δ_B y su ángulo horario H_B . En verde se indica la dirección a la radiofuente de declinación δ_0 y ángulo horario H_0 , así como los ejes de coordenadas uvw .

Para ver sobre qué lugares del plano uv , o de Fourier, conoceremos la visibilidad, hemos de estudiar la trayectoria sobre el mismo de la proyección del vector línea de base \mathbf{B} . Para ello nos serviremos de la figura 3.9 y supondremos conocidos los fundamentos básicos de la astronomía de posición o esférica. Sobre esta figura, tomamos un sistema cartesiano de ejes XYZ con orientación directa. El eje X se elige en la dirección de ángulo horario $H = 0$ y declinación $\delta = 0$, el eje Y dirigido a $H = -6^h$ y $\delta = 0$ (dirección Este del observador) y el eje Z según el eje del mundo $\delta = +90^\circ$. En estos ejes, las componentes de \mathbf{B} (que se deducirían a partir de H_B y δ_B) son:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

mientras que en los ejes en verde son simplemente $\mathbf{B} = \lambda(u, v, w)$. La relación entre ambas expresiones viene dado simplemente mediante la siguiente matriz de rotación.

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R_1(90^\circ - \delta_0) R_3(90^\circ - H_0) \begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{pmatrix}.$$

Expresándolo en componentes y poniendo D como la distancia entre las dos antenas de la línea de base considerada:

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta_0 & \cos \delta_0 \\ 0 & -\cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin H_0 & \cos H_0 & 0 \\ -\cos H_0 & \sin H_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +D \cos \delta_B \cos H_B \\ -D \cos \delta_B \sin H_B \\ +D \sin \delta_B \end{pmatrix}.$$

El signo menos en la segunda componente de la línea de base se debe a que el ángulo horario de la misma se mide en sentido retrógrado, contrario al sentido natural de los ejes XYZ . Operando,

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \sin H_0 & \cos H_0 & 0 \\ -\sin \delta_0 \cos H_0 & \sin \delta_0 \sin H_0 & \cos \delta_0 \\ \cos \delta_0 \cos H_0 & -\cos \delta_0 \sin H_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\cos \delta_B \cos H_B \\ -\cos \delta_B \sin H_B \\ +\sin \delta_B \end{pmatrix}.$$

Terminando de multiplicar la matriz,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{D}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \delta_B \cos H_B \sin H_0 - \cos \delta_B \sin H_B \cos H_0 \\ -\cos \delta_B \cos H_B \sin \delta_0 \cos H_0 - \cos \delta_B \sin H_B \sin \delta_0 \sin H_0 + \sin \delta_B \cos \delta_0 \\ \cos \delta_B \cos H_B \cos \delta_0 \cos H_0 + \cos \delta_B \sin H_B \cos \delta_0 \sin H_0 + \sin \delta_B \sin \delta_0 \end{pmatrix}.$$

Expresado en componentes:

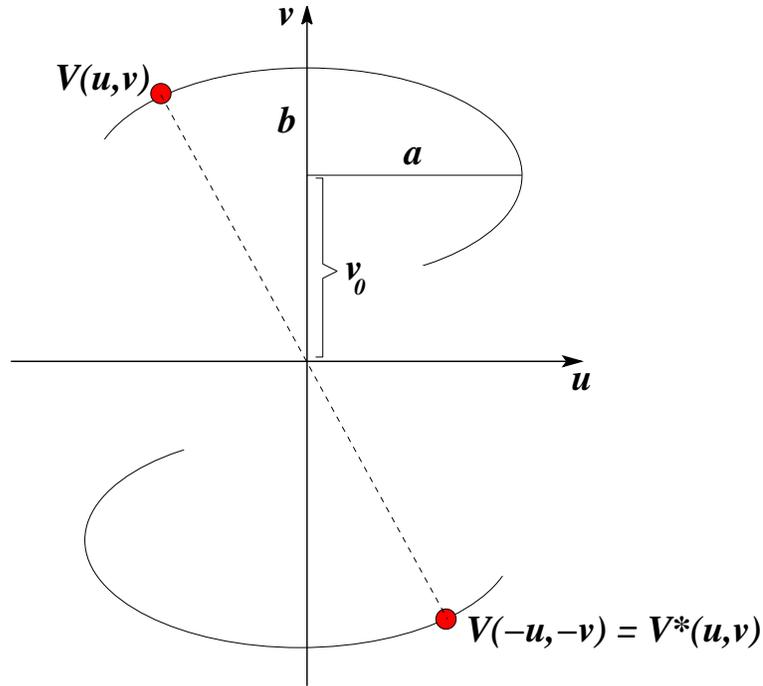


Figura 3.10: Exploración del plano uv por una línea de base entre dos antenas a lo largo de trayectorias elípticas.

$$u = \frac{D}{\lambda} \cos \delta_B \sin (H_0 - H_B) \quad (3.20)$$

$$v = \frac{D}{\lambda} [\sin \delta_B \cos \delta_0 - \cos \delta_B \sin \delta_0 \cos (H_0 - H_B)] \quad (3.21)$$

$$w = \frac{D}{\lambda} [\sin \delta_B \sin \delta_0 + \cos \delta_B \cos \delta_0 \cos (H_0 - H_B)] \quad (3.22)$$

y considerando sólo las componentes uv , es decir la proyección de la línea de base, puede verse que sus expresiones satisfacen:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{(v - v_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3.23)$$

Esta relación corresponde a la ecuación de una elipse siendo

$$a = \frac{D}{\lambda} \cos \delta_B,$$

$$b = \frac{D}{\lambda} \cos \delta_B \sin \delta_0,$$

$$v_0 = \frac{D}{\lambda} \sin \delta_B \cos \delta_0.$$

En la Fig. 3.10 se muestra la exploración del plano uv proporcionada por una línea de base entre dos antenas. Nuestro conocimiento de la visibilidad se realiza sobre los puntos de una elipse cuya ecuación viene dada por 3.23. En realidad las elipses son dos pues el conocimiento de la visibilidad $V(u, v)$ en un punto implica conocerlo en el punto de coordenadas opuestas $V(-u, -v) = V^*(u, v)$ por la forma en que se ha definido la visibilidad en 3.9.

3.5. Frecuencia de las franjas

La componente w de la línea de base dada por 3.22 representa la diferencia de camino de la radiación hacia cada antena. De hecho, tenemos también que el retraso geométrico es $\tau_g = w/c$. La fase relativa de las dos señales cambia entonces en 2π radianes cada vez que w se incrementa en una longitud de onda. Por tanto, la frecuencia de las oscilaciones en el correlador que combina las señales vendrá dada por:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dH_0}{dt} \frac{dw}{dH_0} = -\omega_e \frac{D}{\lambda} \cos \delta_B \cos \delta_0 \sin(H_0 - H_B),$$

donde ω_e es velocidad angular de rotación de la Tierra ($\omega_e = 7,27 \times 10^{-5}$ radianes por segundo sidéreo). Utilizando la ecuación 3.20, la frecuencia de las franjas se puede escribir como:

$$\frac{dw}{dt} = -\omega_e u \cos \delta_0. \quad (3.24)$$

Este resultado se aplica si no hay retrasos instrumentales añadidos al interferómetro como se comentará más adelante.

3.6. Teorema de Van Cittert-Zernike

Este teorema proporciona la respuesta de un interferómetro de dos antenas que observa una fuente con cierta estructura en el cielo en términos de la función de coherencia espacial del campo electromagnético. Proporciona una visión complementaria de la teoría del interferómetro que hemos visto hasta ahora y permite comprender mejor el significado físico de la visibilidad V que aparecen en la ecuación 3.13 que describe la salida del correlador del interferómetro.

Para su demostración, nos basaremos en los sistemas de coordenadas ilustrados en la figura 3.11. Consideraremos que las dos antenas se encuentran en los puntos 1 y 2 del espacio, situados sobre un plano perpendicular a la visual al astro. Las observaciones se realizan a una cierta frecuencia ν y con un ancho de banda $\Delta\nu$ que por ahora omitiremos para no recargar la notación. Supondremos además válidas las siguientes aproximaciones:

1. Ignoraremos, para simplificar, la naturaleza vectorial del campo electromagnético y lo trataremos como un escalar. Esto es equivalente a prescindir de las propiedades de polarización de la radiación, esto es, nuestra discusión se referirá sólo a la componente del campo al que las antenas sean sensibles. Este tratamiento no implica ninguna pérdida de generalidad del resultado. En efecto, la información sobre polarización se puede recuperar en la práctica observando a posteriori la fuente con las antenas configuradas de modo que sean sensibles a una componente ortogonal a la anterior.
2. La fuente a observar está tan lejana que su estructura tridimensional escapa a nuestra capacidad de observación. Sólo podemos preocuparnos de obtener la función que da su intensidad específica como función de la posición en la esfera celeste $I(X, Y)$. En esta función X e Y son coordenadas sobre el plano tangente a la esfera celeste sobre el punto O . En ocasiones, también se suele expresar $I(\xi, \eta)$ donde $\xi = X/R$ y $\eta = Y/R$.
3. En cada elemento m de superficie de la fuente, consideraremos un cierto valor del campo eléctrico $\mathcal{E}_m(t)$ como función del tiempo t . La intensidad específica en ese elemento debe ser proporcional al promedio temporal del módulo al cuadrado del campo eléctrico. Usando corchetes para indicar dicho promedio podemos escribir $I(X, Y) \propto \langle \mathcal{E}_m(t) \mathcal{E}_m^*(t) \rangle$.
4. Supondremos además que la fuente emite de forma incoherente. Esto significa que, dados dos elementos de superficie m y n , la radiación de un elemento es estadísticamente independiente de la del otro.
5. Si el espacio entre la fuente y las antenas está vacío, la propagación del campo eléctrico desde el elemento m a los puntos 1 y 2, donde tenemos las antenas, obedecerá a una ley del tipo:

$$E_{m,1}(t) = \mathcal{E}_m \left(t - \frac{R_{1,m}}{c} \right) \frac{\exp[-i2\pi\nu(t - R_{1,m}/c)]}{R_{1,m}}, \quad (3.25)$$

$$E_{m,2}(t) = \mathcal{E}_m \left(t - \frac{R_{2,m}}{c} \right) \frac{\exp[-i2\pi\nu(t - R_{2,m}/c)]}{R_{2,m}}, \quad (3.26)$$

donde $R_{1,m}$ y $R_{2,m}$ son las distancias escalas del elemento m a los puntos 1 y 2, respectivamente. Aquí hemos tenido en cuenta la propagación de la luz a velocidad finita c y que, de acuerdo con el principio de Huygens, la amplitud del campo decae de modo inversamente proporcional a la distancia a medida que la onda luminosa se propaga esféricamente en cada dirección.

6. En cada punto 1 y 2, el campo eléctrico total será la integral del producido por todos los elementos de superficie de la fuente:

$$E_1(t) = \int E_{m,1}(t) dS_m \quad (3.27)$$

$$E_2(t) = \int E_{m,2}(t) dS_m. \quad (3.28)$$

Con estos preámbulos, pasemos a considerar la coherencia espacial del campo electromagnético entre los puntos 1 y 2. Este grado de coherencia lo podemos estimar mediante la función de correlación $V_{1,2}$ definida

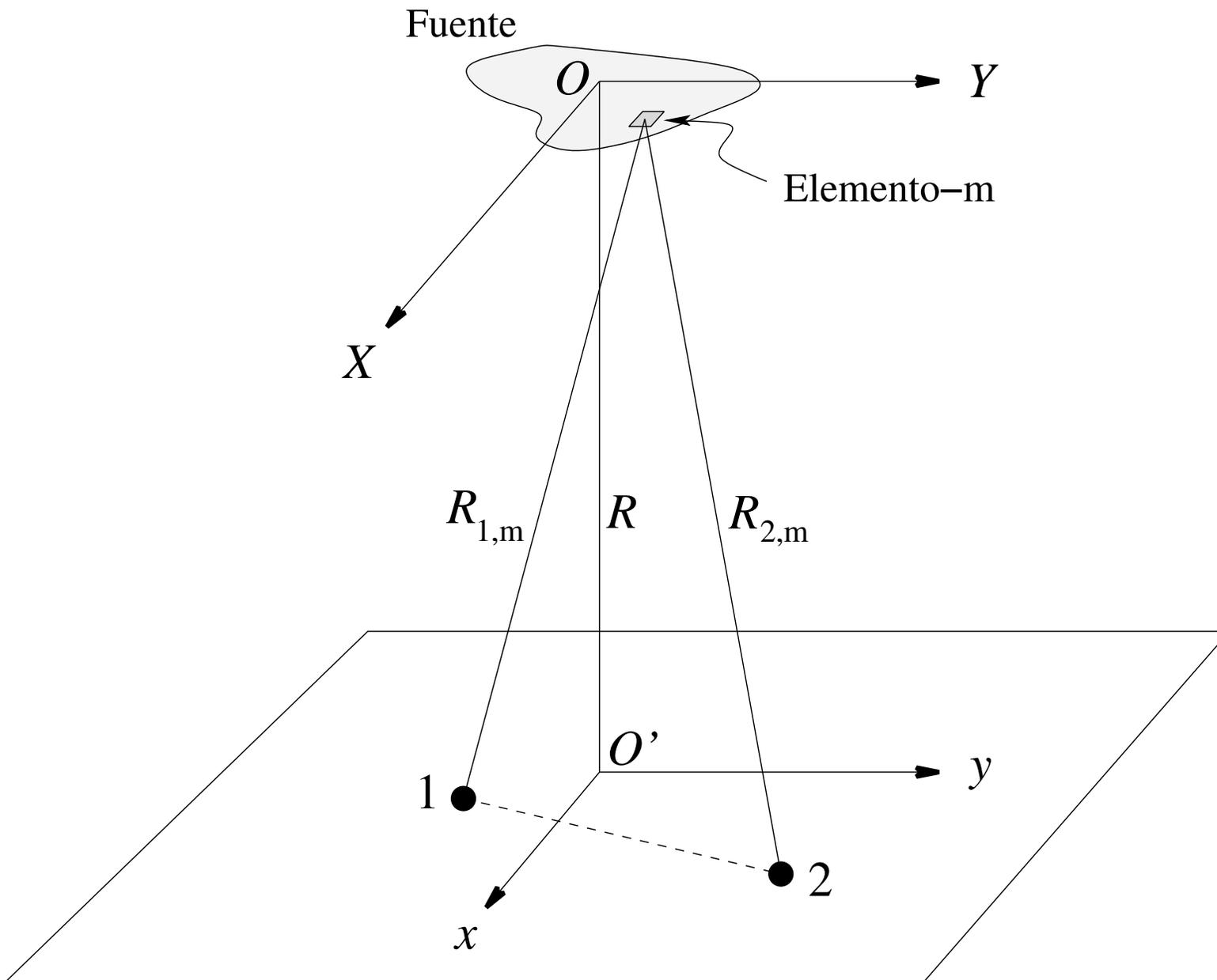


Figura 3.11: Figura para la demostración del **teorema de Van Cittert-Zernike** que proporciona la respuesta de un interferómetro simple en términos de la función de correlación del campo electromagnético entre dos puntos 1 y 2 del espacio situados en un plano normal a la visual.

como el valor esperado de $E_1(t)E_2^*(t)$, donde el asterisco indica aquí tomar el complejo conjugado. Escrito de forma explícita:

$$V_{1,2} = \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} E_1(t)E_2^*(t)dt, \quad (3.29)$$

con T tendiendo a infinito. En el cálculo de esta integral, es claro que antes de promediar aparecerán contribuciones del tipo $E_{m,1}(t)E_{n,2}^*(t)$. Al aplicar promedios en el tiempo, esta clase de términos dará contribución distinta de cero sólo si $m = n$ puesto que los distintos elementos de superficie emiten de forma incoherente entre sí.

Cada elemento de superficie de la fuente contribuirá a la función de correlación $V_{1,2}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle_m &= \langle E_{m,1}(t)E_{m,2}^*(t) \rangle = \\ \langle \mathcal{E}_m \left(t - \frac{R_{1,m}}{c} \right) \mathcal{E}_m^* \left(t - \frac{R_{2,m}}{c} \right) \rangle &= \frac{\exp[-i2\pi\nu(t - R_{1,m}/c)] \exp[+i2\pi\nu(t - R_{2,m}/c)]}{R_{1,m}R_{2,m}} = \\ \langle \mathcal{E}_m(t) \mathcal{E}_m^* \left(t - \frac{(R_{2,m} - R_{1,m})}{c} \right) \rangle &= \frac{\exp[+i2\pi\nu(R_{1,m} - R_{2,m})/c]}{R_{1,m}R_{2,m}}, \end{aligned}$$

donde la variable t de la exponencial compleja se ha cancelado gracias al complejo conjugado y el promedio temporal se ha tomado 'adelantado' en $R_{m,1}/c$. En este punto, haremos la suposición de que $(R_{1,m} - R_{2,m})/c \leq 1/\Delta\nu$, lo cual suele ser razonable en la mayor parte de casos en que la fuente se observa dentro del patrón de franjas debido al ancho de banda del interferómetro (ver apartado 3.2.3). En estas condiciones podemos desprestigiar este término dentro del paréntesis de promedio temporal y quedarnos con:

$$\langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle_m = \langle \mathcal{E}_m(t) \mathcal{E}_m^*(t) \rangle = \frac{\exp[+i2\pi\nu(R_{1,m} - R_{2,m})/c]}{R_{1,m}R_{2,m}}.$$

Recordado la definición de intensidad específica, podemos reescribir lo anterior y salvo una constante multiplicativa adecuada tenemos:

$$\langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle_m = \frac{I(X, Y) \exp[+i2\pi\nu(R_{1,m} - R_{2,m})/c]}{R_{1,m}R_{2,m}}$$

Regresando a la Fig. 3.11, podemos escribir las distancias implicadas como:

$$\begin{aligned} R_{1,m} &= \sqrt{(x_1 - X_m)^2 + (y_1 - Y_m)^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{(x_1 - X_m)^2 + (y_1 - Y_m)^2}{R^2}} \\ R_{2,m} &= \sqrt{(x_2 - X_m)^2 + (y_2 - Y_m)^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{(x_2 - X_m)^2 + (y_2 - Y_m)^2}{R^2}} \end{aligned}$$

Desarrollando en serie de Taylor suponiendo que las dimensiones de la fuente son mucho menores que su distancia ($X/R \ll 1$, $Y/R \ll 1$):

$$R_{1,m} \simeq R + \frac{1}{2R} [(x_1 - X_m)^2 + (y_1 - Y_m)^2]$$

$$R_{2,m} \simeq R + \frac{1}{2R} [(x_2 - X_m)^2 + (y_2 - Y_m)^2]$$

Con ello, la diferencia de distancias es:

$$R_{1,m} - R_{2,m} = \frac{1}{2R} [(x_1 - X_m)^2 + (y_1 - Y_m)^2] - \frac{1}{2R} [(x_2 - X_m)^2 + (y_2 - Y_m)^2] =$$

$$\dots = \frac{(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)}{2R} + \frac{(x_2 - x_1)X_m + (y_2 - y_1)Y_m}{R}.$$

Este tipo de aproximación que se usa también en la difracción de Fraunhofer. Finalmente podremos expresar la función de correlación $V_{1,2}$ integrando las contribuciones individuales de cada elemento de la fuente. Para simplificar la notación, definimos la cantidad auxiliar $\delta \equiv [(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)]/2R$. También expresaremos el elemento de superficie como $dS_m = dXdY = R^2 d\xi d\eta$ y admitiremos que $R_{1,m} \simeq R_{2,m} \simeq R$ que permite cancelar los productos de distancias a 1 y 2 con el factor R^2 del ángulo sólido de m . Las diferencias entre las coordenadas de los puntos 1 y 2 las expresaremos en términos de las componentes de la línea de base:

$$u \equiv (x_2 - x_1)\nu/c = (x_2 - x_1)/\lambda; \quad v \equiv (y_2 - y_1)\nu/c = (y_2 - y_1)/\lambda$$

Con todo ello nos quedará:

$$V_{1,2} = \int \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle_m dS_m = e^{i2\pi\nu\delta/c} \iint I(\xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.30)$$

La cantidad δ es una variación de fase causada por la diferencia de longitud del rayo luminoso a cada antena. Este es un término pequeño cuando la fuente se encuentra a una distancia mucho mayor que $R_0 \equiv D^2/\lambda$, donde R_0 es la distancia del **campo lejano** del interferómetro. Para $D = 10^4$ km y una longitud de onda de 6 cm, la distancia del campo lejano es del orden de 10^4 unidades astronómicas. Por tanto, salvo para objetos del Sistema Solar $\delta \ll 1$ y podemos considerar este término como un simple factor unidad.

Llegamos por fin al resultado importante que constituye el teorema de Van Cittert-Zernike:

$$V_{1,2}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) e^{i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.31)$$

Los límites de integración se han extendido a $\pm\infty$ puesto que la intensidad de la fuente cae a cero no muy lejos del origen O salvo contadas excepciones. Este teorema nos dice que la función de correlación, conocida también como visibilidad, del campo eléctrico entre dos puntos del plano del interferómetro está relacionada a través de una transformada de Fourier con la distribución de intensidad específica de la fuente. A pesar de las muchas aproximaciones admitidas en su deducción, este resultado suele ser útil y válido en la mayoría de situaciones.

3.7. Control del retraso geométrico y conversión de frecuencia

A fin de extraer información sobre amplitud y fase de la respuesta del correlador, hemos de eliminar, o compensar de alguna manera, el término debido al retraso temporal que tenemos claramente presente por ejemplo en 3.13. Esto es equivalente a tener información sobre la correlación del campo eléctrico en los puntos de un plano perpendicular a dirección de la radifuentes, que es exactamente la situación que hemos considerado a la hora de demostrar el teorema de Van Cittert-Zernike.

Todas estas operaciones, que veremos en breve, no se efectúan sobre la señal a la frecuencia de observación ν en el cielo sino que ésta se transforma habitualmente a la llamada frecuencia intermedia ν_{IF} , donde IF es acrónimo de *intermediate frequency*. Esta frecuencia intermedia es considerablemente más baja que la de observación por lo que la tecnología de manipulación y correlación de la señal que se requiere es mucho más factible y sencilla que si no se hiciera la conversión. Por supuesto, esta conversión debe lograrse sin modificar las propiedades de la fase de la señal. Obviamente, el receptor habitualmente empleado para ello no será un simple instrumento de potencia total sino por lo menos un receptor de los llamados superheterodinos.

¿Cómo se efectúa la conversión de frecuencia? Esto se consigue gracias a un oscilador local muy estable, componente básico de un receptor superheterodino, que genera una señal sinusoidal a la frecuencia ν_{LO} , donde LO es el acrónimo de *local oscillator*. El oscilador puede ser único para todo el interferómetro o individual para cada antena en el caso de interferómetros no conectados. El proceso se ilustra esquemáticamente en la Fig. 3.12. La señal procedente de la antena con frecuencia ν , dentro del intervalo $[\nu_0 - \Delta\nu/2, \nu_0 + \Delta\nu/2]$ considerando el ancho de banda del receptor, se multiplica por la señal del oscilador. El dispositivo que realiza este proceso recibe el nombre de mezclador. Para ver que la señal producto tiene una frecuencia más baja, basta considerar una componente de Fourier del voltaje inducido por la señal celeste original en una antena, del tipo $\cos[2\pi\nu t + \phi]$, multiplicado por la señal del oscilador, del tipo $\cos[2\pi\nu_{LO} t + \phi_{LO}]$.

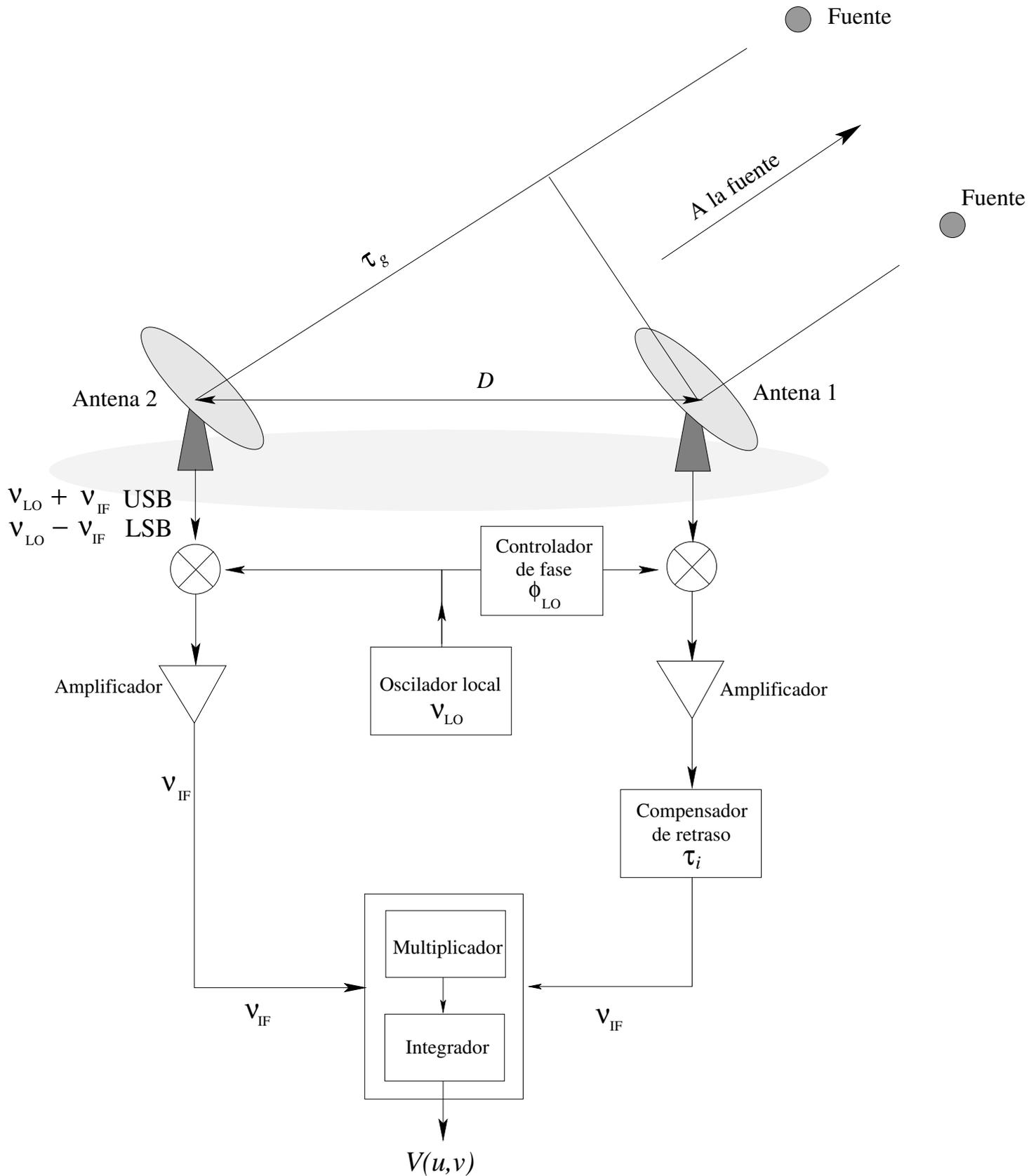


Figura 3.12: Esquema de un interferómetro multiplicativo ilustrando las etapas de conversión de frecuencia antes de entrar las señales al correlador.

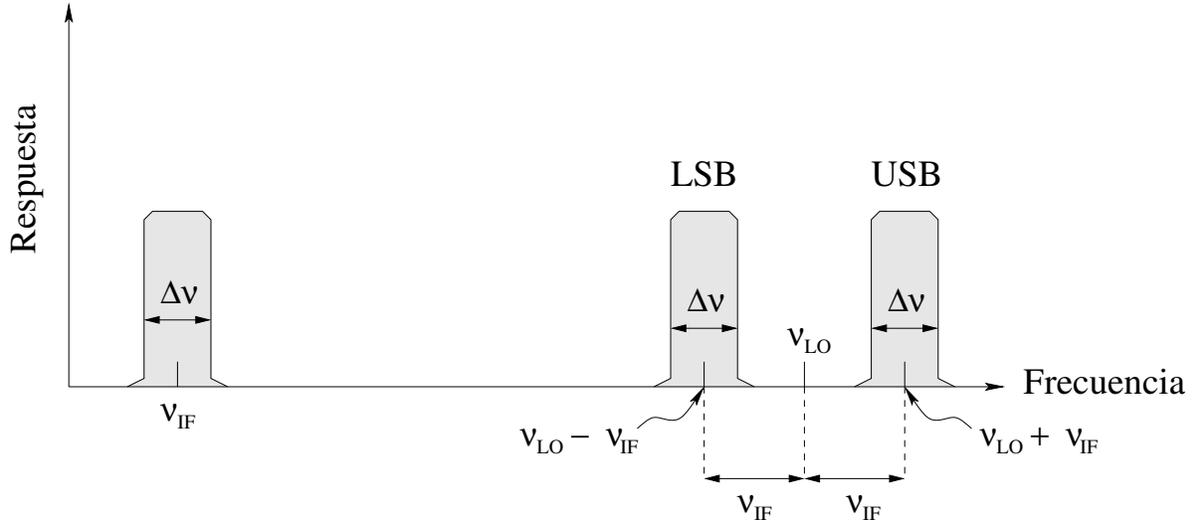


Figura 3.13: Esquema para la conversión de la frecuencia observada en el cielo ν dentro de las bandas laterales superior (USB) e inferior (LSB) a la frecuencia intermedia ν_{IF} , más baja, antes de entrar la señal al correlador.

Usando fórmulas trigonométricas, el producto de las dos señales se descompone en una suma del tipo:

$$\cos [2\pi\nu t + \phi] \cos [2\pi\nu_{OL} t + \phi_{OL}] = \frac{1}{2} (\cos [2\pi(\nu + \nu_{OL})t + \phi + \phi_{LO}] + \cos [2\pi(\nu - \nu_{OL})t + \phi - \phi_{LO}]). \quad (3.32)$$

El resultado del producto contiene términos a la frecuencia suma $\nu + \nu_{LO}$ y a la frecuencia diferencia $\nu - \nu_{LO}$. El primero de ellos, de frecuencia más elevada que la señal celeste, puede eliminarse mediante filtros apropiados. El que sí nos interesa dejar pasar como frecuencia intermedia es sólo el segundo término que al contener una diferencia nos permite trabajar con la señal a una frecuencia mucho más baja que la señal celeste, por supuesto con una sintonización apropiada del oscilador local. Recordemos aquí que ν_{LO} es un valor fijo y que ν puede tomar valores dentro del ancho de banda $\Delta\nu$ del receptor centrado en ν_0 . Dado que el coseno es una función par, da igual que la diferencia de frecuencias sea positiva o negativa para ser admitida la señal por el filtro, $\nu - \nu_{LO} = \pm\nu_{IF}$. Con ello, estaremos bajando a la vez la frecuencia de dos anchos de banda $\Delta\nu$ en el cielo:

$$\nu = \nu_{LO} \pm \nu_{IF}. \quad (3.33)$$

La disposición relativa de estos dos anchos de banda se ilustra en la Fig. 3.13. Reciben el nombre de:

- Banda lateral superior (*Upper side band* o USB): $\nu = \nu_{LO} + \nu_{IF}$.
- Banda lateral inferior (*Lower side band* o LSB): $\nu = \nu_{LO} - \nu_{IF}$.

3.8. Rotación de las franjas

La fase del oscilador local, ϕ_{LO} , es en principio controlable por construcción del dispositivo que suele ser un máser de hidrógeno. De hecho, por ϕ_{LO} nos vamos a referir más concretamente a la diferencia de fase que pueda presentar la señal del oscilador cuando llega al mezclador de cada antena. Consideremos ahora un sistema habitual en el que solamente se utiliza la señal procedente de una banda lateral.

Para el caso USB, en relación con la Fig. 3.12, los cambios de fase ϕ_1 y ϕ_2 impuestos a la señal que llega a cada antena 1 y 2 antes de llegar al correlador son:

$$\phi_1 = 2\pi\nu_{IF}\tau_i + \phi_{LO},$$

y

$$\phi_2 = 2\pi\nu\tau_g = 2\pi(\nu_{LO} + \nu_{IF})\tau_g.$$

Consideremos un intervalo $d\nu$ en frecuencia y recordemos de nuevo el caracter no monocromático de nuestro problema. Para una fuente extensa, la contribución elemental a la respuesta del correlador es tal que debe recoger la dependencia de 3.13:

$$dR = |V| \cos(2\pi\nu\tau_g - \phi_V) d\nu$$

El término $2\pi\nu\tau_g$, que representa la diferencia de fase entra las dos señales, se debe remplazar ahora por su equivalente

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi\nu_{LO}\tau_g + 2\pi\nu_{IF}\tau_g - 2\pi\nu_{IF}\tau_i - \phi_{LO} =$$

$$2\pi\nu_{LO}\tau_g + 2\pi\nu_{IF}(\tau_g - \tau_i) - \phi_{LO}$$

una vez hemos bajado hasta la frecuencia intermedia. Sutiituyendolo en dR y remplazando $d\nu$ por $d\nu_{IF}$, nos quedará:

$$dR = |V| \cos[2\pi\nu_{LO}\tau_g + 2\pi\nu_{IF}\Delta\tau - \phi_{LO} - \phi_V] d\nu_{IF},$$

donde $\Delta\tau \equiv \tau_g - \tau_i$ es el error en la compensación instrumental del retraso geométrico. Integrando ahora para todo el ancho de banda $\Delta\nu$ centrado en ν_{IF_0} siendo ν_{IF} la variable de integración:

$$R = |V| \int_{\nu_{\text{IF}_0} - \Delta\nu/2}^{\nu_{\text{IF}_0} + \Delta\nu/2} \cos [2\pi\nu_{\text{LO}}\tau_g + 2\pi\nu_{\text{IF}}\Delta\tau - \phi_{\text{LO}} - \phi_V] d\nu$$

$$R = |V| \left[\frac{\sin (2\pi\nu_{\text{LO}}\tau_g + 2\pi\nu_{\text{IF}}\Delta\tau - \phi_{\text{LO}} - \phi_V)}{2\pi\Delta\tau} \right]_{\nu_{\text{IF}_0} - \Delta\nu/2}^{\nu_{\text{IF}_0} + \Delta\nu/2} = \dots$$

Empleando también aquí la fórmula del seno de la suma, se evalúa en:

$$R_{\text{USB}} = |V| \Delta\nu \frac{\sin [\pi\Delta\nu\Delta\tau]}{[\pi\Delta\nu\Delta\tau]} \cos [2\pi(\nu_{\text{LO}}\tau_g + \nu_{\text{IF}_0}\Delta\tau) - \phi_{\text{LO}} - \phi_V]. \quad (3.34)$$

Donde se ha recordado en el subíndice que esta expresión es válida para la recepción en la USB. A diferencia del resultado que se obtuvo en 3.7, vemos que ahora que en realidad las franjas del interferómetro oscilarán al ir cambiando τ_g pero su frecuencia esta gobernada por ν_{LO} en vez de la frecuencia de observación ν_0 .

El caso LSB es análogo, pero con algunos signos cambiados porque un cambio de fase en la señal a la frecuencia de observación se invierte al bajar a la frecuencia intermedia en el mezclador. Se partiría de:

$$\phi_1 = 2\pi\nu_{\text{IF}}\tau_i - \phi_{\text{LO}},$$

y

$$\phi_2 = -2\pi\nu\tau_g = -2\pi(\nu_{\text{LO}} - \nu_{\text{IF}})\tau_g.$$

Siguiendo un proceso análogo, se llegaría a:

$$R_{\text{LSB}} = |V| \Delta\nu \frac{\sin [\pi\Delta\nu\Delta\tau]}{[\pi\Delta\nu\Delta\tau]} \cos [2\pi(\nu_{\text{LO}}\tau_g - \nu_{\text{IF}_0}\Delta\tau) - \phi_{\text{LO}} - \phi_V]. \quad (3.35)$$

Idealmente $\Delta\tau_i = 0$ y se puede mantener casi nulo este término con un buen modelo del retraso geométrico, incluyendo las propiedades de la atmósfera sobre las antenas pues el índice de refracción del aire puede sufrir variaciones por múltiples causas. El retraso se implementa mediante un control por ordenador.

A continuación, nada impide tampoco que se pueda cambiar la fase del oscilador local de modo que el término $2\pi(\nu_{\text{LO}}\tau_g - \phi_{\text{LO}})$ se mantenga lo más constante posible a medida que τ_g cambia. Este método, donde habitualmente es el mismo ordenador quien controla τ_i y ϕ_{LO} , se conoce como *fringe rotation* o *fringe stopping*. Bajo estas condiciones, la respuesta del correlador será un voltaje que variará muy suavemente y sólo como consecuencia de los cambios en la línea de base a medida que la Tierra rota.

Tras *parar las franjas*, la amplitud y fase de la visibilidad que contiene la respuesta del correlador se extrae llevando la señal a un correlador como el que estamos considerando y luego a otro con un cambio de fase de $\pi/2$. De este modo se puede obtener la parte real e imaginaria de la visibilidad y por tanto su amplitud y fase. Por supuesto, este proceso requiere previamente una serie de calibraciones instrumentales con una o varias fuentes puntuales de posición conocida que se discutirán en otra ocasión. Diremos sólo que la mayor parte de de esta calibración se puede factorizar en términos propios para cada antena individual.

3.9. Redes de antenas

Hoy en día los inteferómetros constan de mucho más que dos antenas y una sola línea de base. Por ejemplo, el *Very Large Array* (VLA) en Nuevo México (EEUU) dispone de 27 antenas con una distribución de Y para lograr un recubrimiento óptimo del plano uv . El *Giant Metre Wave Radio Telescope* (GMRT) en Punte (India) dispone de 30 antenas con una distribución parecida. Todos estos son ejemplo de lo que se llaman **interferómetros conectados**, donde el flujo de la señal puede transmitirse al correlador mediante dispositivos físicos como cables, fibra óptica, guías de ondas o enlaces de microondas. La ventaja de estos interferómetros es que todas las antenas pueden compartir la misma señal del oscilador local para la etapa heterodina de descenso a frecuencia intermedia y correlación de los voltajes suministrados por cada antena. La longitud máxima de una línea de base de un interferómetro conectado está, con la tecnología actual, en unos 100 km. A longitudes de onda centimétricas, esto limita la resolución angular de un interferómetro conectado a unas pocas centésimas de segundo de arco como mucho.

Si se desean resoluciones angulares mayores no hay más remedio que aumentar la separación entre antenas y que éstas dejen de estar físicamente conectadas entre sí. La señal recogida por ellas debe grabarse con un código de tiempo de alta precisión en cintas magnéticas o discos duros de gran capacidad. Posteriormente, las cintas o discos se llevan a un correlador que reproduce las señales y obtiene su correlación habitualmente con bastantes días, semanas o meses después de la fecha de observación. El hecho de que las antenas se hallen aisladas durante la observación implica que el oscilador local de cada una es distinto e independiente, lo cual complica enormemente el proceso de correlación. Esta técnica de observación se conoce como *Very Long Baseline Interferometry* o VLBI. Las etapas del proceso se esquematizan en la Fig. 3.14.

Los problemas prácticos del VLBI radican sobretodo en que la ϕ_{LO} de 3.34 y 3.35 ya no es única y los osciladores locales de cada antena tendrán una cierta diferencia de fase entre sí que impide correlar perfectamente sus respectivas señales. El código de tiempo generado por los osciladores puede presentar los problemas típicos del estado y marcha de un reloj distintos de cero. Por otro lado, garantizar que $\Delta\tau_i$ sea cuasi nulo ya no es tan fácil cuando las antenas se hallan separadas por miles de kilómetros en líneas de base intercontinentales. Por adecuado que sea el modelo geométrico para calcular el retraso de la radiación, el índice de refracción variable en las alta atmósfera terrestre introduce una incertidumbre considerable comparado con las propiedades

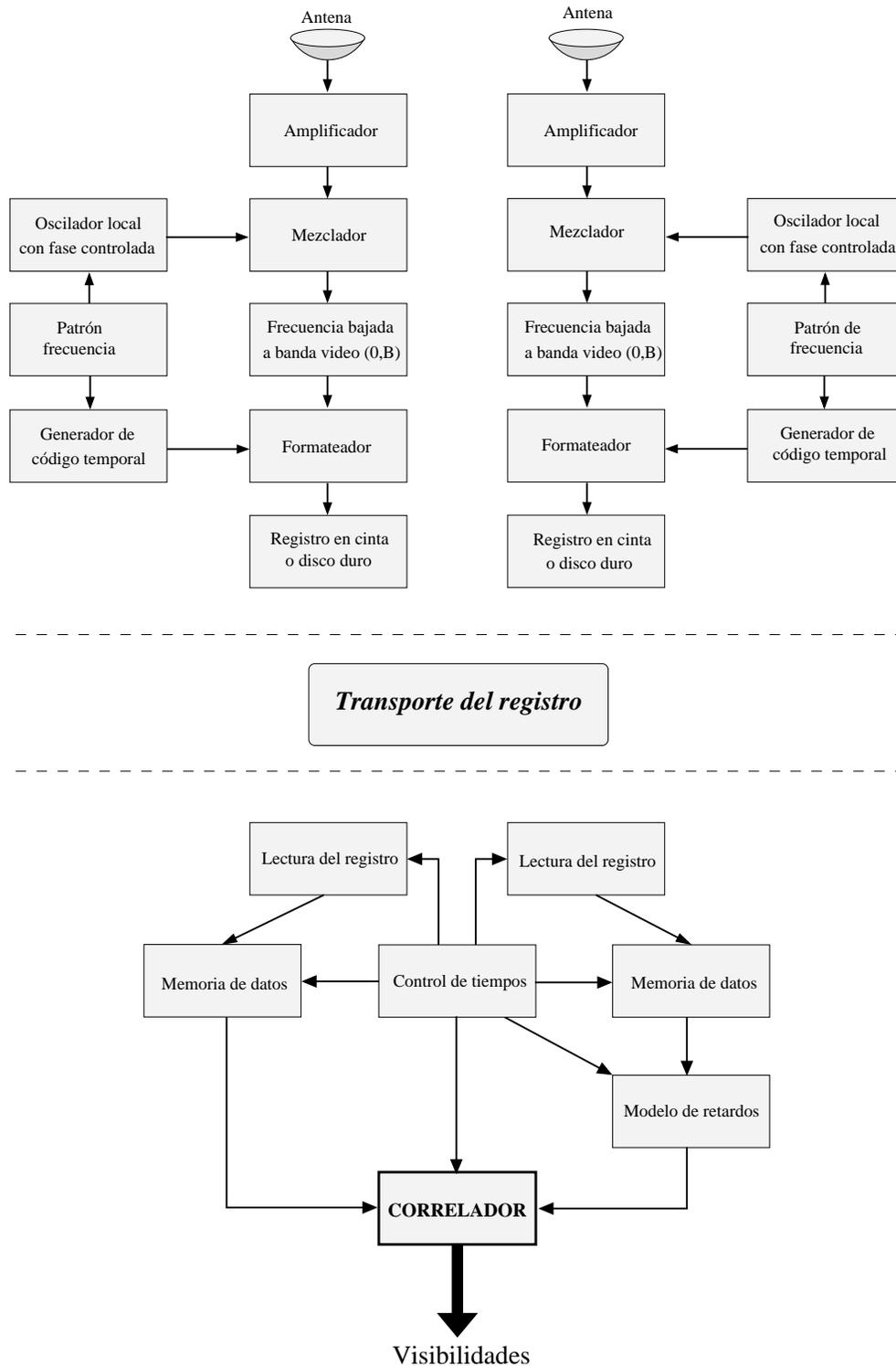


Figura 3.14: Diagrama básico de una línea de base en un sistema de VLBI. Existen dos etapas diferenciadas. La superior corresponde en primer lugar a la observación y registro de las señales recibidas por cada antena. La inferior representa la reproducción de las señales a posteriori para su correlación y obtención de las visibilidades. El proceso de transporte de los registros en cinta o disco duro se sustituirá (en el futuro) por su transmisión a través de líneas de internet de muy alta velocidad.

atmosféricas *locales* que intervienen en el caso de un interferómetro conectado. Otro problema importante es la escasez de radiofuentes puntuales a escalas de milisegundos de arco y a pocos grados de la radiofuente problema que puedan servir de calibradores de fase. En un interferómetro conectado se puede observar cada pocos minutos un calibrador compacto dentro su resolución angular y, de este modo, corregir las desviaciones instrumentales de la fase. Para ello basta con imponer factores complejos asociados a cada antena de modo que la fase de un calibrador puntual cercano angularmente sea siempre nula. En VLBI esto no es siempre posible y el tiempo de coherencia viene dictado por la estabilidad de los standards de tiempo (osciladores locales) que permiten integrar coherentemente durante no más de $\sim 10^3$ s con la tecnología actual (máseres de hidrógeno).

Afortunadamente, la técnica de VLBI permite superar todos estos problemas calculando la correlación entre señales dentro de un rango de retrasos mayor que cualquier incertidumbre que pueda existir. Los datos obtenidos del correlador se pueden considerar como una matriz de visibilidades instrumentales en función del tiempo y del retraso. Habitualmente el eje temporal se transforma a un eje de frecuencia de las franjas (*fringe frequency*) o frecuencia residual de las franjas (*residual fringe frequency*). Este último concepto es la diferencia entre la variación esperada de la frecuencia de las franjas (3.24) y la variación real. El problema radica entonces en encontrar para qué retraso y qué frecuencia residual de las franjas es máxima la amplitud de la señal correlada. Localizado y ajustando el máximo en este espacio de dos dimensiones se pueden eliminar las fuentes de error citadas en el párrafo anterior.

Este proceso se conoce como *fringe fitting* y es típico de una observación VLBI. No todas las fuentes de interés son lo bastante intensas como para que la búsqueda de las franjas tenga éxito. Por ello, en toda observación se insertan algunos calibradores (*fringe finders*) lo bastante brillantes como para lograr una estimación aproximada de las correcciones instrumentales a aplicar a las fuentes problema. Una vez aplicadas estas correcciones, los datos del interferómetro VLBI pasan a ser como las visibilidades en bruto de un interferómetro conectado y pueden promediarse.

3.10. Relaciones de cierre

Si bien la calibración de la amplitud no presenta excesivo problema en VLBI, no es así para la fase de la visibilidad debido sobretodo a los errores del oscilador local de cada antena y a la atmósfera. No obstante, se puede recuperar una fracción importante de la información aportada por la fase a la hora de reconstruir un mapa gracias a las llamadas relaciones de cierre para la fase y para la amplitud.

Supongamos dos antenas i y j en los extremos de una línea de base y sean θ_i y θ_j los errores de fase atribuibles a sus respectivos osciladores locales y a la atmósfera. La fase observada que se obtendría puede representarse por:

$$\psi_{ij} = \phi_{ij} + \theta_i - \theta_j,$$

donde ϕ_{ij} es la fase auténtica de la distribución de brillo en el cielo. Los términos de error son desconocidos, pero nada impide que formemos la cantidad como **fase de cierre** (*closure phase*) que involucra a tres antenas ijk y definida como:

$$\Psi_{ijk} \equiv \psi_{ij} + \psi_{jk} + \psi_{ki}. \quad (3.36)$$

Puede demostrarse que esta cantidad es equivalente a la suma de las tres fases auténticas. Desarrollando:

$$\Psi_{ijk} = \phi_{ij} + \theta_i - \theta_j + \phi_{jk} + \theta_j - \theta_k + \phi_{ki} + \theta_k - \theta_i,$$

donde los términos asociados a cada antena se cancelan uno a uno. Por tanto, la fase de cierre es también:

$$\Psi_{ijk} = \phi_{ij} + \phi_{jk} + \phi_{ki}. \quad (3.37)$$

Existen diversos algoritmos que hacen uso de este tipo de relaciones para reconstruir mejor la distribución de brillo problema. Cuanto mayor es el número de antenas, más relaciones de cierre de fase se pueden plantear y mejor constreñida será la solución.

También se pueden imponer relaciones de cierre sobre la amplitud de la visibilidad, pero exigen la intervención de cuatro antenas. La **amplitud de cierre** se puede definir mediante:

$$A_{ijkl} \equiv \frac{|V_{ij}||V_{kl}|}{|V_{ik}||V_{jl}|}, \quad (3.38)$$

pudiéndose demostrar que es también independiente de los efectos atmosféricos e instrumentales.

3.11. El VLBI en la práctica

Actualmente existen diversos consorcios científicos dedicados regularmente a realizar observaciones de VLBI. Destacan sobre todo la *European VLBI Network* (EVN) en Europa y el *Very Long Baseline Array* (VLBA) en EEUU. A estas redes de antenas se les han unido ocasionalmente otras en el espacio a bordo de satélites en auténticos experimentos de VLBI espacial donde la longitud máxima de las líneas de base ya no está limitada por el diámetro de la Tierra.

Por otro lado, el número de fuentes utilizables como calibradores en VLBI está también aumentando y es cada vez más frecuente que se pueda calibrar también la fase en VLBI (*phase referencing*) de modo semejante a un interferómetro conectado. De lo contrario, debe ser la propia radiofuente quien actúe como calibrador en un proceso iterativo conocido como autocalibración, que puede auxiliarse también en las relaciones de cierre para establecer su convergencia. Empezando con un modelo muy simple (por ej. una fuente puntual) se trata de reproducir y ajustar el comportamiento temporal de la amplitud y fase de la visibilidad observada. Tras varias iteraciones el modelo se va mejorando hasta lograr una reproducción satisfactoria. Las componentes introducidas en el proceso de ajuste son las que finalmente representan la distribución de brillo de la radiofuente

observada. El problema de la autocalibración es que está limitada a radiofuentes relativamente brillantes para que su convergencia sea satisfactoria.

La última novedad en el campo del VLBI es el envío en tiempo real de la señales al correlador electrónicamente por medio de internet de banda ancha (eVLBI). Llegará el día en que la distinción entre interferometría conectada y VLBI dejará de tener el significado actual y ambas técnicas se confundirán en una sola.

3.12. Principios de la reducción de datos

Cuando una red de antenas observa como inteferómetro una radiofuente en el cielo, las distintas líneas de base van explorando el plano uv o de Fourier y obteniendo información sobre la amplitud y fase de la visibilidad $V(u, v)$ en distintos puntos del plano. La calibración de la amplitud suele hacerse observando calibradores de densidad de flujo conocida (por ejemplo 3C286 y 3C48) o partir de la temperatura del sistema de cada antena individual. La calibración de la fase es más complicada y depende de si el interferómetro está conectado (mediante calibradores) o se trata de una observación de VLBI (mediante autocalibración o mediante calibradores si es en modo *phase referencing*). El proceso se realiza mediante un software de análisis como por ejemplo el paquete AIPS del NRAO. Su resultado final es una tabla de factores complejos de ganancia $g_i(t)$ asociados a cada antena y como función del tiempo. El producto de la visibilidad bruta por este factor es la visibilidad calibrada a partir de la cual se puede tratar de reconstruir la distribución de brillo en el cielo mediante transformadas de Fourier.

La limitación fundamental de todo este proceso es que no es posible conocer completamente $V(u, v)$ para todo el plano uv . En general, podemos considerar que conocemos sólo la visibilidad observada $V_{\text{obs}}(u, v)$ definida como:

$$V_{\text{obs}}(u, v) = V(u, v)W(u, v), \quad (3.39)$$

donde $W(u, v)$ es una función de muestreo o recubrimiento que vale 1 para puntos donde se ha medido la visibilidad y cero para los puntos en que no se ha explorado. Designando por $D(\xi, \eta)$ a la transformada de Fourier de $V_{\text{obs}}(u, v)$, el producto de transformadas se convierte en producto de convolución en el plano imagen:

$$D(\xi, \eta) = I_\nu(\xi, \eta) * P(\xi, \eta), \quad (3.40)$$

donde $D(\xi, \eta)$ es el llamado mapa sucio (*dirty map*) y $P(\xi, \eta)$ el haz sintetizado del interferómetro. Este último es equivalente al concepto de función de distribución de punto (*point spread function* o PSF) más habitual en

astronomía óptica. En interferometría se tiene la ventaja de que la PSF es calculable exactamente de modo analítico como transformada de Fourier del recubrimiento del plano uv . Si el recubrimiento es bueno, $P(\xi, \eta)$ tendrá un lóbulo principal estrecho y lóbulos laterales de muy baja amplitud.

A partir de esto punto, obtener la distribución de brillo en el cielo implica tener que deconvolucionar el producto de 3.40. Existen diversos métodos o algoritmos empleados para ello y entre ellos destaca especialmente el método de CLEAN por su simplicidad conceptual y eficacia en buena parte de casos prácticos.

3.12.1. El algoritmo CLEAN

Se parte del mapa sucio y empieza buscando el máximo de emisión. Corresponderá a un cierto punto de intensidad C_i y coordenadas (ξ_i, η_i) . Se supone que en ese punto hay una fuente puntual con esa misma densidad de flujo C_i y cuya contribución se distribuye de acuerdo con la PSF sintetizada. Por tanto, al mapa sucio se le resta la contribución:

$$C_i P(\xi - \xi_i, \eta - \eta_i).$$

Para cada componente sustraída se guarda la información de su posición y densidad de flujo. Cuando el primer máximo ya no es tal, se busca el siguiente punto del mapa donde la intensidad sea ahora máxima y se repite el proceso iterativamente. El mapa sucio se va *limpiando* progresivamente a cada iteración que sustrae una componente. Una vez sustraídas todas ellas, conocidas también como componentes limpias o *clean components*, en el mapa sucio sólo queda emisión a nivel de ruido residual. Habremos logrado entonces una descomposición del map sucio expresada por:

$$D(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{i=N} C_i P(\xi - \xi_i, \eta - \eta_i) + I_\nu^{\text{residual}}(\xi, \eta). \quad (3.41)$$

El resultado final del algoritmo CLEAN son el conjunto de máximos o componentes limpias $C_i(\xi_i, \eta_i)$. Estas componentes puntual se convolucionan después con el llamado haz limpio o *clean beam* $P_{\text{clean}}(\xi, \eta)$, que suele ser una Gaussiana elíptica ajustada por mínimos cuadrados al lóbulo principal del haz sintetizado. El mapa final que se obtiene resulta de la convolución de las componentes limpias con el haz limpio, esto es:

$$I_\nu^{\text{clean}}(\xi, \eta) = \left(\sum_{i=1}^{i=N} C_i(\xi_i, \eta_i) \right) * P_{\text{clean}}(\xi, \eta) + I_\nu^{\text{residual}}(\xi, \eta). \quad (3.42)$$

La adición del término residual de la limpieza conserva en el mapa las propiedades de ruido que físicamente son inherentes a toda observación. La práctica del algoritmo CLEAN suele requerir desde 100 a varios miles de iteraciones dependiendo de la complejidad de la fuente a cartografiar. También es frecuente que las componentes no se sustraigan de golpe sino multiplicando el valor del máximo por un cierto factor de ganancia, del orden de 0.1, de modo que la limpieza de componentes sea más suave y progresiva. En el paquete AIPS, es la tarea IMAGR la encargada de aplicar el algoritmo CLEAN y dispone de varios parámetros auxiliares que permiten adaptar su aplicación a cada caso pero la idea básica es la que se ha descrito aquí.

Capítulo 4

Bibliografía

Estos apuntes se han redactado basándose en las obras listadas a continuación y también parcialmente en los contenidos de la asignatura de *Radiastronomía* impartida por los Drs. Robert Estalella Boadella y Josep M. Paredes Poy de la Universitat de Barcelona.

1. Booth, R. S., Brault, J. W. and Labeyrie, A., 1985, *High Resolution in Astronomy*, 15th Advanced Course, Swiss Society of Astrophysics and Astronomy, SAAS-FEE 1985
2. Burke, B. F. and Graham-Smith, F., 1997, *An introduction to Radio Astronomy*, Cambridge University Press
3. Cernushi, F. y Codina, S., 1965, *Panorama de la astronomía moderna*, serie de física, monografía N° 2, Dep. de Asuntos Científicos, Organización de los Estados Americanos
4. Estalella, R., Anglada, G., 1996, *Introducción a la física del medio interestelar*, Edicions de la Universitat de Barcelona
5. Kraus, J. D., 1986, *Radio Astronomy* 2nd edition, Cygnus-Quasar Books
6. Pacholczyk, A. G., 1979, *Radioastrofísica*, Editorial Reverté S.A.
7. Perley, R. A., Schwab, F. R. and Bridle, A.H. (Eds.), 1994, *Synthesis imaging in radio astronomy*, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 6
8. Rohlfs, K., 1986, *Tools of Radio Astronomy*, Astronomy & Astrophysics Library, Springer-Verlag
9. Thompson, A. R., Moran, J. M., Swenson, Jr., G. W., 1986, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons