COMPUTACIÓN 2003 – ASTRONOMIA

PRACTICA 1b

1. Todo número complejo $z = (x, y) = x + iy$ no nulo admite exactamente n raíces n-ésimas distintas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x$$

Confeccionar un programa que calcule tales raíces dado un número complejo z. Verificar el programa calculando las raíces n-ésimas de la unidad para $n = 1, 2, 3$.

2. El *máximo común divisor* (a, b) de dos número enteros positivos a y b, con $a \geq b$ puede ser calculado por el *algoritmo de Euclides*, según el cual el máximo común divisor es igual al último resto no nulo que se obtiene por aplicación sucesiva de la división entera entre el divisor y el resto del paso anterior. Esto es,

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n$$

Implementar este algoritmo para calcular el máximo común divisor de dos números enteros *cualesquiera* dados, contemplando la posibilidad de que alguno de ellos, o ambos, sea negativo o cero. (*Ayuda*: $(a, b) = (|a|, |b|)$ y $(a, 0) = 0$, pero $(0, 0)$ no está definido).

Verificar el programa calculando (25950,1095) = 15, (252,-1324) = 4.

3. El ejercicio anterior hace uso de la operación módulo, implementada en `FORTRAN` mediante la función `MOD`. ¿Podría decir por que el siguiente programa, si bien compila, da un resultado equivocado?

```
PROGRAM BUG
INTEGER I,J
I = 7
J = I MOD 4
WRITE (*,*) J
END
```

Si no encuentra el error recurra a la sentencia `IMPLICIT NONE`.

4. En la ecuación cúbica general de tercer grado

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

poniendo $x = x' - a_2/3$, obtenemos una ecuación cúbica sin término cuadrático, cuyas raíces son las de la primera, incrementadas en $-a_2/3$. Alcanza, pues, con considerar las ecuaciones cúbicas del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

donde, para simplificar, supondremos que p y q son números reales. Se sigue entonces del teorema fundamental del algebra, que esta ecuación tiene: o bien una única raíz real, o bien tres raíces reales (pudiendo coincidir dos de ellas). Estas raíces reales pueden ser calculadas *exactamente* como sigue.

Sea

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

el *discriminante* de la ecuación cúbica.

Si $\Delta > 0$, entonces existe una única raíz real, x_1, dada por $x_1 = u_1 + v_1$, donde

$$u_1 = \operatorname{sign}\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)\left|-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right|^{1/3}, \quad v_1 = \operatorname{sign}\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)\left|-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right|^{1/3}$$

Si $\Delta = 0$, tendremos tres raíces reales (siendo dos iguales), x_1 , $x_2 = x_3$, dadas por

$$x_1 = 2u_1, \quad x_2 = x_3 = -u_1$$

donde

$$u_1 = \operatorname{sign}\left(-\frac{q}{2}\right)\left|-\frac{q}{2}\right|^{\frac{1}{3}}$$

Finalmente, si $\Delta < 0$, habrá tres raíces reales (distintas) x_1, x_2, x_3, dadas por

$$x_1 = 2\rho^{1/3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad x_2 = 2\rho^{1/3}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}\pi\right), \quad x_3 = 2\rho^{1/3}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4}{3}\pi\right)$$

donde

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho}$$

a) Teniendo en cuenta lo anterior, confeccionar un programa que calcule las raíces reales de las ecuaciones cúbicas del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

b) Compruebe el programa con los siguientes casos triviales:

$$x^3 = 0, \quad x^3 - 1 = 0, \quad x^3 - x = 0$$

c) Encuentre las raíces reales de la ecuación

$$x^3 - 3.5292x + 2.118176 = 0$$

(*Rta:* Redondeado a cinco decimales, las raíces son $x_1 = 1.43162, x_2 = -2.1272, x_3 = 0.69552$)