Electromagnetismo - CURSO 2015
Práctica N^o 6

30- Considere dos cortezas cilíndricas infinitamente largas y conductoras, de radios R_1 y R_2, cuyos ejes son paralelos y están a una distancia d entre si ($R_1 + d < R_2$). Suponga que una corriente I circula a través de cada corteza en sentidos opuestos en la dirección de los ejes, de manera que las densidades superficiales sean respectivamente uniformes. Obtenga el campo de inducción $\vec{B}$ en todo el espacio.

31- Considere una corteza conductora esférica y un alambre conductor recto que se extiende a lo largo de uno de sus diámetros. Suponga que por el alambre circula una corriente constante I que retorna por la esfera, cerrando el circuito. Determine el campo de inducción magnética en todo el espacio.

32- Considere una espira cuadrada de lado L, por la que circula una corriente uniforme I.
a) Por consideraciones de simetría deduzca el valor del potencial vector (en el gauge de Coulomb) sobre el eje que pasa por el centro de la espira y es perpendicular al plano de la misma. Determine además la dirección del campo magnético sobre dicho eje.
b) Calcule el potencial vector en todo el espacio.
c) Calcule la inducción magnética en todo el espacio.

33- Considere dos conductores rectilíneos infinitamente largos. Uno de ellos se halla emplazado a lo largo del eje x, mientras que el otro es paralelo al eje y a una distancia d del mismo ($z = d$). Ambos conducen corrientes iguales de intensidad I, orientadas en el sentido positivo de los respectivos ejes.

a) Determine el campo de inducción magnética en todo el espacio.

b) Calcule la fuerza magnética por unidad de longitud que el primer conductor ejerce sobre el segundo en cada punto del mismo. ¿Cuál será la fuerza total?

c) Calcule la fuerza magnética como función de la posición sobre una carga puntual de magnitud q, que se desplaza con velocidad constante $\vec{v_0}$ sobre el eje z alejándose de los conductores en el sentido positivo de dicho eje. ¿Cuál será el trabajo de la fuerza magnética entre las posiciones $z = 2d$ y $z = 3d$?

34- Considere una corteza cilíndrica infinitamente larga de radio R, por la que circula una corriente acimutal (es decir, que las lineas de corriente son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al eje del cilindro). Suponga que la densidad de corriente $\vec{\kappa}$ es uniforme.

a) ¿ Qué puede decir con respecto a la dirección de la inducción magnética y su dependencia con la posición en cada punto del espacio ?
b) Calcule la inducción magnética en los puntos del eje del cilindro.
c) Extienda el cálculo para cualquier punto del espacio, tanto en el interior como en el exterior del cilindro.

35- Considere un circuito cerrado plano formado por un conductor en forma de espiral de n vueltas, cuyos extremos se cierran mediante un conductor recto orientado radialmente con respecto al centro del espiral. Suponga que los extremos del tramo recto se encuentran a distancias R_1 y R_2 de dicho centro, mientras que el espiral puede describirse en coordenadas polares (r, θ) mediante la relación :

$$r = R_1 + a\theta.$$

a) Calcule la inducción magnética en el centro del espiral cuando circula una corriente I por el circuito.
b) Verifique que en el límite en que $R_2 \to R_1$ y $n \to 1$, la inducción magnética en el centro del espiral tiende al resultado corespondiente al centro de una espira circular.

36- Un fenómeno habitual en la Astrofísica consiste en la formación de hojas de corriente. Estas formaciones pueden interpretarse como láminas delgadas sobre las que se desarrollan corrientes muy intensas. Las mismas suelen ser representadas mediante arreglos bidimensionales en los que se asume una densidad de corriente superficial.
a) Elija una densidad de corriente volumétrica (no estrictamente superficial) que de una buena representación para una hoja de corriente.
b) Encuentre los campos eléctrico y magnético en todo el espacio.
c) Construya el límite en que el espesor de la hoja se hace despreciable frente a las dimensiones del sistema.
d) Verifique que en dicho límite los campos se comportan de acuerdo con las condiciones de contorno habituales.

Hojas de corriente

Consideremos una distribución de corriente estacionaria desarrollada predominantemente en las inmediaciones del plano $y - z$, infinitamente extendida y dirigida en la dirección z. Una representación posible altamente simétrica de esta situación viene dada por

$$\vec{J} = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}\, a} exp\,(-\frac{x^2}{a^2})\, \breve{k} \tag{1}$$

donde a es una constante que puede considerarse una medida del ancho de la región en la que la corriente es significativa, mientras que κ es otra constante cuyo significado se pondrá de manifiesto más adelante. Para evaluar la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ en todo el espacio podemos valernos de la simetría translacional sobre cualquier dirección paralela al plano $y-z$, de donde se concluye que $\vec{B}$ es función solo de la coordenada x. Luego la forma diferencial de la ley de Biot-Savart nos ayuda a visualizar la nulidad de las componentes B_x y B_z, mientras que nos permite reconocer

$$B_y(-x) = -B_y(x) \tag{2}$$

Por último, la ley de Ampère nos permite estimar la componente B_y, de modo que la inducción magnética completa resulta

$$\vec{B} = \mu \, \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} \, erf \left(\frac{|x|}{a} \right) \, sg(x) \, \breve{\jmath} \tag{3}$$

En la figura presentamos las componentes J_z de la densidad de corriente y B_y de la inducción magnética en función de la coordenada x. Nótese que las leyes de Ohm y de Ampère permiten estimar inmediatamente el campo eléctrico y el rotor de la inducción magnética, a partir de la densidad de corriente. Esto es

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}. \tag{5}$$

Ahora estudiaremos el modo en que se comportan las diversas variables electrodinámicas cuando la región en la cual la corriente es significativa se hace muy estrecha. Esta situación puede visualizarse construyendo los límites para $a \to 0$ en las formas explícitas de cada magnitud no nula. Entonces,

$$\lim_{a \to 0} \vec{J} = \kappa \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} exp\,(-\frac{x^2}{a^2}) \right] \breve{k} = \kappa \, \delta(x) \breve{k} \tag{6}$$

$$\lim_{a \to 0} \vec{B} = \mu \, \kappa \lim_{a \to 0} \left[\frac{sg(x)}{\sqrt{\pi}} \, erf \left(\frac{|x|}{a} \right) \right] \breve{\jmath} = \frac{\mu \, \kappa}{2} \, sg(x) \breve{\jmath} \tag{7}$$

donde $\delta(x)$ es la función de Dirac. Naturalmente, el campo eléctrico y el rotor de la inducción magnética divergen de modo análogo a la densidad de corriente,

$$\lim_{a \to 0} \vec{E} = (\kappa/\sigma) \delta(x) \breve{\jmath} \tag{8}$$

$$\lim_{a \to 0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \, \kappa \, \delta(x) \breve{k}. \tag{9}$$

En este punto cabe preguntarse acerca de la interpretación física que admiten los últimos resultados. Es razonable suponer que en una situación real no podrán darse magnitudes deltiformes ni discontinuas. Sin embargo, si la zona del espacio en la que se evalúan los campos es tan extensa como para que resulte despreciable el espesor de la región de corrientes, la representación dada por las últimas ecuaciones es completamente válida.

Por otra parte, de las últimas ecuaciones puede deducirse el significado físico de la constante κ en el caso límite. En efecto, de la ecuación (6) puede concluírse que κ constituye el módulo de una densidad superficial de corriente sobre el plano $y-z$, dirigida según el versor $\breve{k}$ [1]. Así puede introducirse un vector $\vec{\kappa}$ dado por

$$\vec{\kappa} = \kappa\breve{k}. \tag{10}$$

Veremos ahora que la ecuación (7) es compatible con las condiciones de contorno habituales para la inducción magnética. Para ello suponemos que, además de la hoja de corriente, existen otras fuentes externas que dan lugar a una inducción magnética $\vec{B_e}$ continua sobre el plano $y-z$. Entonces, definiendo por

$$\vec{B_h^+}(\vec{r_s}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{a\to 0}\vec{B}(\vec{r_s}+\varepsilon\breve{i}) = \frac{\mu\,\kappa}{2}(\breve{k}\times\breve{i}) = \frac{\mu}{2}(\vec{\kappa}\times\breve{i}) \tag{11}$$

$$\vec{B_h^-}(\vec{r_s}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{a\to 0}\vec{B}(\vec{r_s}-\varepsilon\breve{i}) = -\frac{\mu\kappa}{2}(\breve{k}\times\breve{i}) = -\frac{\mu}{2}(\vec{\kappa}\times\breve{i}), \tag{12}$$

tenemos que la inducción magnética a cada lado de la hoja de corriente viene dada por

$$\vec{B^+}(\vec{r_s}) = \vec{B_e}(\vec{r_s}) + \vec{B_h^+}(\vec{r_s}) \tag{13}$$

$$\vec{B^-}(\vec{r_s}) = \vec{B_e}(\vec{r_s}) + \vec{B_h^-}(\vec{r_s}). \tag{14}$$

Restando miembro a miembro, y observando que $\breve{i}$ es el vector unitario normal a la hoja de corriente (con lo que admitimos un cambio de notación de $\breve{i}$ por $\breve{n}$), tenemos la condición de contorno

$$\vec{B^+}(\vec{r_s}) - \vec{B^-}(\vec{r_s}) = \mu(\vec{\kappa}\times\breve{n}) \tag{15}$$

o bien, escrita en su forma usual

$$\breve{n}\times(\frac{\vec{B^+}(\vec{r_s})}{\mu} - \frac{\vec{B^-}(\vec{r_s})}{\mu}) = \vec{\kappa} \tag{16}$$

[1]Nótese que, aun cuando el límite no se haya realizado, κ es el módulo de la densidad de corriente integrada sobre la coordenada x.

37- Dos hojas de corriente planas paralelas infinitamente extendidas poseen densidadws superficiales de corriente uniformes $\vec{K}$ y $-\vec{K}$, y en la escala de interés para nuestro problema puede considerarse que sus espesores son despreciables.

a) Determine la forma más general que puede tomar la trayectoria de una partícula de masa m y carga q, en el campo magnético producido por las hojas de corriente en las distintas regiones, en términos de condiciones iniciales arbitrariamente elegidas [2].

b) Determine las condiciones iniciales para las cuales las trayectorias son rectas o circunferencias.

c) Calcule la energía magnética por unidad de volumen en la región comprendida entre las hojas.

38- Considere una barra cilíndrica de material ferromagnético duro, de longitud finita, uniformemente magnetizada en la dirección de su eje. Discuta la continuidad de los campos $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en los extremos del cilindro y determine las correspondientes densidades de masa magnética.

Deduzca expresiones para los campos de excitación e inducción magnética para los puntos del eje, tanto interiores, como exteriores a la barra.

[2] Recuerde que el estado inicial de una partícula queda completamente especificado si se conocen todas las componentes de la posición y la velocidad en un dado instante.