ELECTROMAGNETISMO - CURSO 2015
Práctica N^o 2
Electrostática: Aspectos matemáticos

8- Pruebe que en cualquier cubo macizo uniformemente cargado el potencial electrostático en su centro es el doble que en cualquiera de sus vértices (suponiendo que el potencial en el infinito se elige nulo).

9- Verifique seis de las siguientes identidades vectoriales

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{1}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \tag{2}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) \tag{6}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi\vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{A} \tag{8}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0 \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tag{11}$$

10- Usando que la Delta de Dirac cumple que

$$\delta(x - x_0) = 0, x \neq x_0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0)dx = g(x_0)$$

mostrar que

$$a)\delta(cx) = \frac{\delta(x)}{|c|}, \quad \text{donde c es una constante no nula.}$$

$$b)f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$$

c)Si f(x) es una función continua que se anula en un punto x_0

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x)|}\delta(x - x_0)$$

$d)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - x_0)dx = -f'(x)|_{x_0}$

$e)\dfrac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x),$ donde $\Theta(x)$ es la función de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

f) Integrando en el campo complejo

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}dk = \pi i\left[\Theta(x) - \Theta(-x)\right]$$

g) Usando e) y f) mostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = 2\pi\delta(x)$$

h) Usando g) mostrar

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\sin(Kx)}{\pi x} = \delta(x)$$

11- Utilizando la Delta de Dirac y sus propiedades, escriba las densidades volumétricas de cargas y corriente (según corresponda) en los siguientes sistemas:
a) Una superficie esférica uniformemente cargada.
b) Una secuencia infinita de cargas puntuales idénticas alineadas equidistantes.
c) Un hilo rectilíneo e infinito uniformemente cargado.
d) Una hoja de corriente plana e infinita con densidad superficial de corriente uniforme.
e) Una superficie cilíndrica de radio R, infinitamente larga, sobre la cual circula una corriente cuya densidad tiene módulo uniforme y su componente paralela al eje del cilindro es nula.
f) Una espira circular con corriente I.

12- Considere una esfera hueca de espesor despreciable que aloja una carga uniformemente distribuída. Verifique utilizando la ley de Coulomb que el campo electrostático en el interior de la esfera es nulo.

13- Considere una esfera de densidad de carga uniforme ρ_0 y radio a que posee un cavidad esférica de radio b. Los centros de ambas esferas están separadas una distancia d $(d + b < a)$. Obtenga el campo electrostático y el potencial en todo el espacio.

14- Suponiendo conocido el potencial de un dipolo en todo el espacio, encuentre que el campo electrostático puede escribirse como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k_1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\left[3\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \vec{p}\right]$$

$$r \neq r'$$