Análisis de Señales en Geofísica

14° Clase

Transformada Bidimensional de Fourier

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Introducción:

La extensión de la transformada de Fourier a múltiples dimensiones es simple e inmediata.

De los cuatro tipos posibles de transformadas de Fourier en una dimensión surgen dieciséis tipos posibles en dos dimensiones.

Veamos con cierto detalle la transformada integral de Fourier y la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones (2D).

Transformada Integral de Fourier 2D:

La transformada integral de Fourier en dos dimensiones está definida por el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{cases} F(\mathrm{K},\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-i(\mathrm{K}x+\Omega t)}\, dx\, dt \\ f(x,t) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mathrm{K},\Omega)\, e^{i(\mathrm{K}x+\Omega t)}\, d\mathrm{K}\, d\Omega \end{cases}$$

En este caso en particular las dos dimensiones de la señal $f(x,t)$ son el espacio y el tiempo, aunque podrían haber sido cualquier otra cantidad como por ejemplo dos dimensiones espaciales. En estas ecuaciones la variable K es conocida por el nombre de frecuencia espacial o número de onda, y es medida en unidades de radianes sobre distancia. Más halla de sus significados físicos las variables x y t así como las variables K y Ω juegan exactamente el mismo papel desde el punto de vista matemático.

Transformada Integral de Fourier 2D:

Todas las propiedades de la transformada integral de Fourier 2D se pueden derivar de manera inmediata de las correspondientes propiedades de la transformada integral de Fourier 1D. Por ejemplo la transformada integral de Fourier 2D de una señal real $f(x,t)$ función de dos variables tiene las siguientes propiedades de simetría:

$$\mathrm{Re}\left[F(-\mathrm{K},-\Omega)\right] = \mathrm{Re}\left[F(\mathrm{K},\Omega)\right]$$
$$\mathrm{Im}\left[F(-\mathrm{K},-\Omega)\right] = -\mathrm{Im}\left[F(\mathrm{K},\Omega)\right]$$

Es decir que para una señal real $f(x,t)$ la parte real de la transformada de Fourier 2D es simétrica respecto del origen en el plano $\mathrm{K}-\Omega$, mientras que la parte imaginaria es antisimétrica respecto del origen. Es decir que el espectro de amplitud es simétrico respecto del origen mientras que el espectro de fase es antisimétrico respecto del origen:

$$\left|F(-\mathrm{K},-\Omega)\right| = \left|F(\mathrm{K},\Omega)\right|$$
$$\phi(-\mathrm{K},-\Omega) = -\phi(\mathrm{K},\Omega)$$

Por esta razón, solo es necesario graficar un semiplano del espectro 2D.

Transformada Integral de Fourier 2D de una Exponencial Compleja:

Veamos cual es la transformada de Fourier de la siguiente exponencial compleja:

$$f(x,t) = e^{i(\mathrm{K}_0 x + \Omega_0 t)}$$

Sustituyendo en la expresión de la transformada integral de Fourier 2D, y haciendo uso de nuestros conocimientos de la transformada 1D, obtenemos:

$$F(\mathrm{K},\Omega) = 4\pi^2 \delta(\mathrm{K}_0 - \mathrm{K})\delta(\Omega_0 - \Omega)$$

Es decir que la transformada de una exponencial compleja es una delta de Dirac doble, escalada por $4\pi^2$, ubicada en el punto (K_0, Ω_0) del plano $\mathrm{K} - \Omega$. Lo cual a la luz de nuestros conocimientos previos es claramente razonable ya que la señal $f(x,t)$ es una sinusoide compleja pura con dos frecuencias K_0 y Ω_0. En este caso la señal corresponde a una onda plana porque la ubicación de los puntos en los cuales la fase es constante:

$$\phi_0 = \mathrm{K}_0 x + \Omega_0 t = cte.$$

Corresponde a un plano en un espacio de tres dimensiones $x - y - z$. La función $f(x,t)$ es independiente de las variables espaciales y y z, por lo tanto el frente de onda plano se propaga en la dirección negativa, y es paralelo al plano $y - z$.

Transformada Integral 2D de una Delta de Dirac Lineal:

Veamos cual es la transformada de Fourier 2D de la siguiente delta de Dirac lineal:

$$f\left(x,t\right)=\delta\left(t-px-\tau\right)$$

Esta función describe una recta en el plano $x-t$ de pendiente p y de ordenada al origen τ. Su valor es cero en todos los puntos del plano excepto en los puntos pertenecientes a la recta $t=px+\tau$ donde tenemos una delta de Dirac. Sustituyendo en la expresión de la transformada integral de Fourier, obtenemos:

$$F\left(\mathrm{K},\Omega\right)=2\pi e^{-i\Omega\tau}\delta\left(\mathrm{K}+\Omega p\right)$$

Lo cual nos dice que la transformada integral de Fourier 2D de una recta $t=px+\tau$ en el plano $x-t$ es otra recta $\Omega=-\mathrm{K}/p$ en el plano $\mathrm{K}-\Omega$. Obsérvese que el espectro de amplitud de esta transformada es independiente del valor de la ordenada al origen τ. Solamente el espectro de fase depende de τ. Por lo cual todas las rectas que tienen la misma pendiente en el plano $x-t$, tendrán el mismo espectro de amplitud. Observe que las rectas con pendiente positiva en el plano $x-t$, tendrán pendiente negativa en el plano $\mathrm{K}-\Omega$, y los valores de las pendientes serán recíprocos y de diferente signo, es decir que las rectas en uno y otro plano serán perpendiculares.

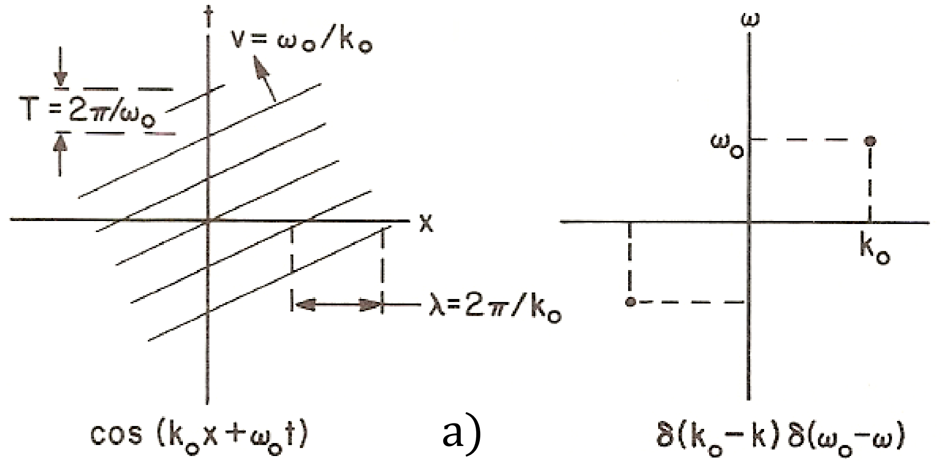
Transformada Integral de Fourier 2D:

Dos pares de transformadas de Fourier 2D:

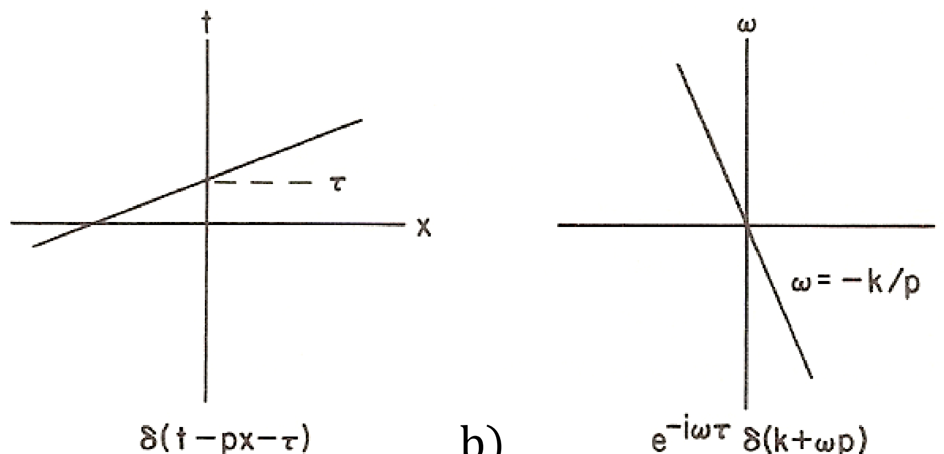
a) La transformada de una onda plana es una función δ de Dirac en el punto (ω_0, k_0).

b) La transformada de una función δ de Dirac lineal, con pendientes recíprocas de distinto signo.

Sólo estamos graficando el espectro de amplitud. El espectro de fase es lineal con pendiente $-\tau$.



a)



b)

Transformada Discreta de Fourier 2D:

La extensión de la transformada discreta de Fourier 1D a 2D también es inmediata. La transformada discreta de Fourier 2D está dada por el siguiente par de ecuaciones:

$$F_{j,k} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times n - i\frac{2\pi}{M} k\times m}$$

$$f_{n,m} = \frac{1}{N\times M} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} F_{j,k} e^{i\frac{2\pi}{N} j\times n + i\frac{2\pi}{M} k\times m}$$

La transformada 2D puede verse como dos transformadas 1D en cascada:

$$F_{j,k} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} e^{-i\frac{2\pi}{M} k\times m} \right) e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(TDF_j \left\{ f_{n,m} \right\} \right) e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times n} = TDF_k \left\{ TDF_j \left\{ f_{n,m} \right\} \right\}$$

La transformada discreta de Fourier 2D del arreglo bidimensional $f_{n,m}$ de $N \times M$ dimensiones ,se obtiene tomando la transformada discreta de Fourier 1D primero sobre cada fila del arreglo y luego sobre cada columna del resultado.

Transformada Discreta de Fourier 2D:

Lo mismo se cumple para la transformada discreta inversa de Fourier 2D. Para calcular la transformada 2D debemos efectuar $N + M$ transformadas discretas de Fourier 1D. Dada una subrutina para calcular la transformada rápida de Fourier FFT, la programación de la transformada 2D o de cualquier dimensión superior, es sumamente sencilla. Claro que los tiempos de computación son significativamente mayores, pero la gran velocidad de cómputo de la FFT, generalmente hace que el procesamiento en el dominio de las multi-frecuencias sea preferible respecto de otras alternativas. Por ejemplo, para un operador lineal 2D corto en ambas direcciones puede ser que la convolución sea más rápida que la multiplicación en el dominio de Fourier, sin embargo la operación realizada en el dominio de Fourier es independiente de la longitud del operador, por lo cual si el operador es largo siempre será mas rápida su aplicación en el dominio de la transformada de Fourier. Además existen extensiones de la FFT a dimensiones múltiples que son más rápidas que las sucesivas aplicaciones de la FFT-1D a cada dimensión.

Transformada Discreta de Fourier 2D:

Todas las precauciones que debemos tomar para el cálculo de la transformada discreta 1D también debemos tomarlas para la transformada 2D:

1) El aliasing: los datos bidimensionales pueden sufrir aliasing en x, en t o en ambas coordenadas. Habitualmente el intervalo de muestreo requerido para evitar el aliasing no es un problema en la dimensión temporal, pero si puede llegar a serlo en las dimensiones espaciales, especialmente en aplicaciones como sismología o sísmica. Sin embargo, en aplicaciones como procesamiento de imágenes el muestreo denso de los datos es fácil de lograr en todas las dimensiones, lo cual le da una gran ventaja a los métodos que trabajan en las dimensiones múltiples de Fourier.

2) La transformada discreta 2D es periódica en ambas dimensiones, por lo cual debemos tener las precauciones apropiadas a la hora de aplicar el teorema de convolución.

3) Cuando utilizamos la TDF-2D para aproximar el espectro de señales continuas, debemos agregar ceros en ambas direcciones para reducir las filtraciones o pérdidas (*leakage*). Esta necesidad puede incrementar enormemente los tiempos de cálculo.

Respuesta Impulsiva Bidimensional:

Así como la convolución es la operación más general posible que relaciona la entrada y la salida de un sistema lineal e invariante 1D, también lo es para un sistema lineal e invariante 2D. Es decir que en un sistema lineal e invariante bidimensional la entrada y la salida estarán vinculadas por el producto de convolución de la entrada con la respuesta impulsiva bidimensional del sistema:

$$y_{n,m} = \sum_{j} \sum_{k} h_{n-j,m-k} x_{j,k}$$

Esta sumatoria doble incluye todos los valores no nulos tanto de h_n como de x_n. Aquí también la convolución puede ser lineal o circular. Cuando la convolución es lineal, la respuesta impulsiva puede ser finita o infinita.

Respuesta Impulsiva Bidimensional:

En el caso particular en que sea posible factorizar la respuesta impulsiva del sistema lineal e invariante, es decir $h_{n,m} = f_n \times g_m$, la suma de convolución adquiere una forma más simple:

$$y_{n,m} = \sum_j \sum_k f_{n-j} g_{m-k} x_{j,k} = \sum_j f_{n-j} \left(\sum_k g_{m-k} x_{j,k} \right)$$

En este caso en particular en el cual la respuesta impulsiva se puede factorizar, la convolución 2D se puede implementar como dos convoluciones 1D en cascada. Si $h_{n,m}$ es un operador de $N \times M$ y $x_{n,m}$ es una secuencia de longitud P$\times$ Q, entonces $N \times M \times P \times Q$ multiplicaciones y sumas son necesarias para calcular la convolución 2D (sin tener en cuenta los efectos de borde) mientras que si fuera posible factorizar la respuesta impulsiva, solamente $N \times M + P \times Q$ multiplicaciones y sumas serían necesarias para calcular la convolución 2D. El precio que debemos pagar por este dramático cambio en la cantidad de operaciones es el de utilizar un operador con una estructura mucho más limitada.

Respuesta en Frecuencia de los SLI 2D:

Como es de esperarse las exponenciales complejas bidimensionales son funciones propias de los sistemas lineales e invariantes bidimensionales. Es decir, si la entrada a nuestro sistema lineal e invariante fuera:

$$x_{n,m} = e^{i\omega_1 n + i\omega_2 m}$$

Entonces la salida estaría dada por:

$$y_{n,m} = \sum_j \sum_k h_{j,k} e^{i\omega_1 (n-j) + i\omega_2 (m-k)}$$

$$y_{n,m} = e^{i\omega_1 n + i\omega_2 m} \sum_j \sum_k h_{j,k} e^{-i\omega_1 j - i\omega_2 k} = e^{i\omega_1 n + i\omega_2 m} H(\omega_1, \omega_2)$$

Donde:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_j \sum_k h_{j,k} e^{-i\omega_1 j - i\omega_2 k}$$

Vemos que la salida es la misma exponencial compleja pero escalada por el valor propio $H(\omega_1, \omega_2)$, el cual no es otra cosa que la respuesta en frecuencia o espectro de frecuencias del sistema lineal e invariante 2D.

Diseño de Filtros Bidimensionales en el Dominio de las Frecuencias:

Sabemos que un filtro lineal e invariante puede ser aplicado por convolución en el dominio del tiempo o por multiplicación en el dominio de la frecuencia. Esto mismo es válido para filtros lineales e invariantes multidimensionales. Como en el caso 1D el problema de diseñar un filtro de frecuencias bidimensional consiste en encontrar la respuesta impulsiva bidimensional que posea la respuesta en frecuencias deseada.

En el caso bidimensional es mucho más probable que el filtrado se realice en el dominio de las frecuencias debido a que ahorraríamos mucho tiempo computacional.

Sabemos que las zonas de transición abruptas en el dominio de las frecuencias están asociadas a operadores de convolución muy largos en tiempo, y cuando los operadores de convolución son largos es preferible aplicarlos en el dominio de las frecuencias para ahorrar tiempo de computación.

Para filtrar en el domino de las frecuencias debemos calcular la TDF-2D, anular las componentes de frecuencias no deseadas y luego calcular la trasformada inversa 2D.

Diseño de Filtros Bidimensionales en el Dominio de las Frecuencias:

Sin embargo debemos ser muy cuidadosos con las zonas de transición, debemos utilizar *tapers* y/o ventaneos para asegurarnos que las zonas de transición sean suaves.

Aquí también como en el caso 1D es conveniente agregar ceros en ambas direcciones antes de tomar la TDF-2D. Recordemos que la verdadera respuesta en frecuencia de esta operación no es la función en frecuencia aplicada sino la respuesta en frecuencia de su respuesta impulsiva.

Los filtros FK o *fan filters* son filtros de frecuencias 2D de gran utilidad. Tienen una respuesta en frecuencias tipo abanico (*fan*) o porción de torta (*pie-slice*). Estos filtros, también llamados filtros de pendientes dejan pasar algunos eventos lineales con determinadas pendientes mientras que impedirán la salida de otros eventos con pendientes diferentes. Debemos recordar que siempre es necesario diseñar áreas de transición entre las áreas de paso y de rechazo. Si en nuestros datos bidimensionales no hubieran presentes eventos lineales, cualquiera sean los eventos presentes siempre podremos pensarlos como la composición de eventos lineales.

Ventanas bidimensionales:

Veamos como extender el uso de las ventanas que utilizamos en una dimensión a dos dimensiones. Una forma sería multiplicando dos ventanas de una sola dimensión del siguiente modo:

$$w_{n,m} = w_n w_m$$

Este método permite combinar diferentes ventanas y distintas longitudes en diferentes direcciones según nos resulte más conveniente. Otra forma de extender ventanas a dos dimensiones es diseñando ventanas circulares:

$$w_{n,m} = w_{\sqrt{n^2+m^2}}$$

Como en el caso 1D truncar las respuestas impulsivas con estas ventanas es equivalente a convolucionar la respuesta en frecuencias del filtro en cuestión con la respuesta en frecuencia de la ventana utilizada. Esto permite diseñar filtros más cortos con zonas de transición menos abruptas.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Twelve.
- Yilmaz, Oz (1987), Seismic Data Processing, Society of Exploration Geophysicist.