Análisis de Señales en Geofísica

12° Clase

Procesos Aleatorios

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Proceso Aleatorio:

Un proceso aleatorio es una secuencia indexada de variables aleatorias:

$$x_n$$

Para caracterizar un proceso aleatoria debemos especificar las funciones de densidad de probabilidades de todos sus miembros:

$$p_{x_n}$$

Como así también todas las funciones de densidad de probabilidades conjuntas:

$$p_{x_n,x_m}$$

En procesamiento de señales digitales se utilizan procesos aleatorios para modelar señales aleatorias. Una señal aleatoria es considerada una realización de un proceso aleatorio. El modelo aleatorio puede estar en conflicto con la realidad. Sin embargo, el proceso físico que genera la señal es tan complejo y nuestro entendimiento del mismo tan pobre, que lo interpretamos como aleatorio. Esto no significa que el proceso sea realmente aleatorio, sólo significa que somos ignorantes.

Promedios Estadísticos:

Es habitual caracterizar una variable aleatoria por medio de sus promedios estadísticos, tales como el valor medio, la varianza y los momentos de orden superior:

Valor medio:

$$\mu_{x_n}{}^{(1)} = \mu_{x_n} = E\{x_n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p_{x_n}(x) \, dx$$

Varianza:

$$\mu_{x_n}{}^{(2)} = \sigma_{x_n}{}^2 = E\left\{\left(x_n - \mu_{x_n}\right)^2\right\} = E\{x_n{}^2\} - \mu_{x_n}{}^2$$

Momentos de orden superior:

$$\mu_{x_n}{}^{(r)} = E\left\{\left(x_n - \mu_{x_n}\right)^r\right\}$$

Procesos Estacionarios:

Cuando todos los promedios estadísticos son iguales para todas las variables que conforman el proceso aleatorio se dice que el proceso es estrictamente estacionario:

$$\mu_{x_n}{}^{(r)} = \mu_x{}^{(r)} \qquad \forall n$$

Cuando solamente el valor medio y la varianza no varían con el tiempo se dice que el proceso es estacionario débil, estacionario en sentido amplio o estacionario de segundo orden:

$$\mu_{x_n} = \mu_x \qquad \forall n$$

$$\mu_{x_n}{}^{(2)} = \sigma_{x_n}{}^2 = \sigma_x{}^2 \qquad \forall n$$

El valor medio, la varianza y los momentos de orden superior son promedios estadísticos que nos proporcionan valiosa información sobre el proceso, es decir, aunque la señal sea aleatoria, es capaz de contener información en sus promedios estadísticos.

La Autocovarianza:

En nuestro caso el más útil de los promedios estadísticos de un proceso aleatorio es la autocovarianza, definida como:

$$\gamma_{xx}(n, m) = E\{x^*{}_n \ \ x_m\}$$

Esta nos da información sobre la dependencia entre los valores de un proceso aleatorio a distintos tiempos, es decir, es una medida de la variación temporal de la señal aleatoria. Sin embargo, si el proceso es estacionario de segundo orden, la autocovarianza es independiente de un corrimiento del origen de los tiempos, solo depende de la diferencia de tiempos:

$$\gamma_{xx}(n, n+m) = \gamma_{xx}(m) = E\{x^*{}_n \ \ x_{n+m}\}$$

En el contexto de procesamiento de señales digitales los procesos aleatorios estacionarios son un concepto matemáticamente conveniente que nos permite utilizar la teoría de probabilidades para representar señales de energía infinita. Sin embargo, en la práctica tratamos con una única secuencia y no con un universo o población infinita de secuencias

Ergodicidad:

Diremos que un proceso aleatorio estacionario es ergódico si sus promedios estadísticos son iguales a los promedios temporales, es decir:

$$\mu_x = E\{x\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n$$

$$\sigma_x{}^2 = E\{(x-\mu_x)^2\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (x_n - \mu_x)^2$$

$$\gamma_{xx}(m) = E\{x^*{}_n \ x_{n+m}\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*{}_n \ x_{n+m}$$

Debemos inferir las propiedades estadísticas del proceso aleatorio estacionario a partir de una única realización del mismo. Esto sólo es posible asumiendo que el proceso aleatorio estacionario es ergódico, entonces los promedios estadísticos pueden ser calculados a partir de una única secuencia de energía infinita por medio de sus promedios temporales

Promedio de la muestra:

En realidad tampoco nos es posible calcular los promedios temporales, ya que no observamos la señal entre $-\infty$ y $+\infty$. Con una única realización de longitud *N* que disponemos sólo podemos calcular estimadores de los promedios temporales llamados promedio de la muestra o estimador experimental:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

$$\hat{\sigma}_x{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \hat{\mu}_x)^2$$

$$\hat{\gamma}_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*{}_n \; x_{n+m}$$

La diferencia entre la secuencia de autocorrelación que oportunamente definimos y este estimador de la autocovarianza es únicamente el factor 1/*N*.

Teorema de Wiener-Khintchine

Para muchas señales de interés, como por ejemplo: sinusoides, escalones, signo, señales aleatorias, etc., sus amplitudes no decaen en el infinito, y la transformada integral de Fourier de la autocorrelación no existe. Sin embargo el teorema de Wiener-Khintchine nos dice que la transformada integral de Fourier de la autocovarianza sí existe y es lo que se denomina densidad del espectro de potencia:

$$P(\Omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\Omega)|^2}{2T}$$

Donde $F_T(\Omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & t \le |T| \\ 0 & t > |T| \end{cases}$$

La autocovarianza de una señal analógica de energía infinita está dada por:

$$\gamma(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^*(\tau)\, f(t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega)\, e^{-i\Omega t} d\Omega$$

El Peridiograma

Para el caso discreto de una señal real de energía infinita de la cual solo hemos observado *N* muestras, solo podemos calcular un estimador de la autocovarianza mediante el promedio de las muestras o estimador experimental $\hat{\gamma}_{xx}(k) = \hat{p}_k$:

$$\hat{p}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n \ x_{n+k} \ ; \qquad k = -(N-1), (N-1)$$

El estimador de la densidad del espectro de potencias está dado por:

$$\hat{P}(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{p}_k \, e^{-i\omega k} = \hat{p}_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)} \hat{p}_k \cos(\omega k)$$

A este estimador de la densidad del espectro de potencia se le da el nombre de peridiograma.

Teorema de descomposición de Wold

Este teorema prueba que toda serie de tiempo estacionaria x_n, puede ser descompuesta en dos partes, una primera componente determinística u_n y una segunda componente aleatoria ν_n:

$$x_n = u_n + \nu_n$$

Donde estas componentes son ortogonales, es decir:

$$E\{u_n \nu_{n+\tau}\} = 0 \quad ; \qquad \tau \neq 0$$

Además la componente estocástica estacionaria, se puede expresar como un proceso lineal promedio móvil (MA) a_n con energía finita, excitado por ruido blanco no correlacionable ε_n, es decir:

$$x_n = u_n + \varepsilon_n * a_n$$

En el caso del modelo de la traza sísmica $u_n = 0$, la reflectividad representa al ruido no correlacionable ε_n y el modelo de promedio móvil a_n representa a la ondícula:

$$x_n = r_n * w_n$$

Tres modelos básicos para representar a nuestros datos

Si nuestros datos discretos x_n corresponden a un proceso aleatorio estacionario, el teorema de descomposición de Wold nos permite suponer que estos datos fueron generados por un sistema lineal excitado por ruido aleatorio no correlacionado ε_n, con media nula $E\{\varepsilon_n\} = 0$ y varianza ${\sigma_\varepsilon}^2 = E\{{\varepsilon_n}^2\}$. Este sistema lineal puede ser descripto matemáticamente de muchas maneras, pero existen tres formas que resultan útiles y para las cuales pueden darse excelentes justificaciones teóricas. En la literatura de análisis de señales se las denomina:

1. Proceso Autoregresivo (Autoregressive process) (AR):

$$x_n = \varepsilon_n - b_1 x_{n-1} - b_2 x_{n-2} - b_3 x_{n-3} - \cdots - b_M x_{n-M}$$

2. Proceso Promedios Móviles (Moving Average process) (MA):

$$x_n = a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + a_2 \varepsilon_{n-2} + a_3 \varepsilon_{n-3} + \cdots + a_N \varepsilon_{n-N}$$

3. Proceso Autoregresivo - Promedios Móviles (Autoregressive-Moving Average process) (ARMA):

$$x_n = a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \cdots + a_N \varepsilon_{n-N} - b_1 x_{n-1} - b_2 x_{n-2} - \cdots - b_M x_{n-M}$$

Donde los coeficientes deben ser determinados para caracterizar el proceso.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press. Chapter Eleven.
- Oppenheim, A.V. and Schafer, R. (1975), Digital Signal Processing, Prentice-Hall.