Análisis de Señales en Geofísica

10° Clase

Transformada de Hilbert

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Propiedades

- La transformada de Hilbert de una señal produce un adelanto de su fase de $\pi/2$ radianes.

- Cuando una señal es causal en un dominio, ya sea tiempo o frecuencia, la parte real y la imaginaria en el otro dominio estarán vinculadas por la transformada de Hilbert.

- Si la señal causal es además de fase mínima, entonces el logaritmo natural del espectro de amplitud será igual a la transformada de Hilbert del espectro de fase.

Función Signo

Se define la función signo $\operatorname{sgn}(t)$ como:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Su transformada integral de Fourier está dada por:

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\Omega}}$$

Función Signo

Calculemos la transformada integral de Fourier de la función signo:

$$FT\{e^{-\alpha|t|}\,\mathrm{sgn}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\,\mathrm{sgn}(t)\; e^{-i\Omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}(-1)e^{-i\Omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}(+1)e^{-i\Omega t} dt =$$

$$= \int_{0}^{-\infty} e^{\alpha t} e^{-i\Omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\Omega t} dt =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{+i\Omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\Omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(e^{-i\Omega t} - e^{+i\Omega t}\right) dt =$$

$$= 2i \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(-\frac{e^{+i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i}\right) dt = -\,2i \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t) = \frac{2}{i}\frac{\Omega}{\Omega^2 + \alpha^2}$$

Función Signo

$$e^{-\alpha|t|}\,\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i}\frac{\Omega}{\Omega^2+\alpha^2}$$

Tomando el límite cuando α tiende a cero:

$$\lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha|t|}\,\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{i}\frac{\Omega}{\Omega^2+\alpha^2}$$

Obtenemos:

$$\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i}\frac{\Omega}{\Omega^2}$$

O lo que es equivalente:

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\Omega}}$$

Función Signo

Apliquemos la propiedad de simetría de la transformada de Fourier:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$$

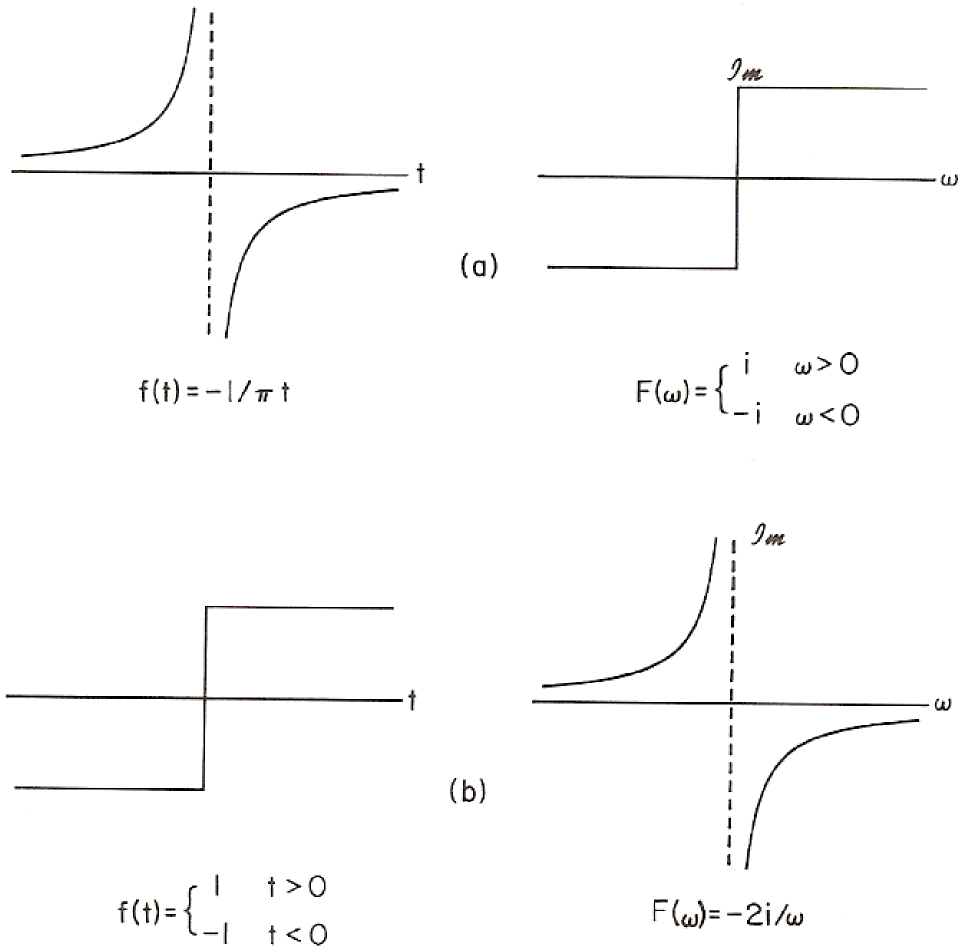
a la función signo:

$$\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\Omega} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{it} \Leftrightarrow -2\pi \times \mathrm{sgn}(\Omega)$$

O lo que es equivalente:

$$\boxed{\frac{-1}{\pi t} \Leftrightarrow i\ \mathrm{sgn}(\Omega) = e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\Omega}{|\Omega|}}}$$

Función Signo



Transformada de Hilbert

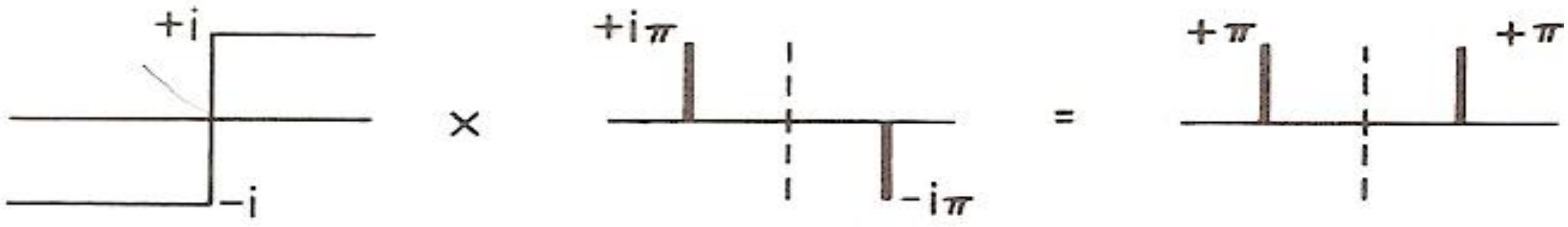
Se define la transformada de Hilbert como la convolución con la función $\dfrac{-1}{\pi t}$:

$$\boxed{HT\{f(t)\} = f(t) * \frac{-1}{\pi t} = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau}$$

Convolucionar en tiempo por $-1/\pi t$, es equivalente a multiplicar en frecuencia por $i \times \mathrm{sgn}(\Omega)$, es decir, no modificamos el espectro de amplitud, sólo estamos aplicando un corrimiento en fase de $+\pi/2$ para las frecuencias positivas, y de $-\pi/2$ para las frecuencias negativas.

La transformada de Hilbert produce un adelanto de la fase de $\pi/2$, por lo cual se dice que una función y su transformada de Hilbert están en cuadratura.

Transformada de Hilbert de senos y cosenos



i·sgn(ω) × sine spectrum = cosine spectrum

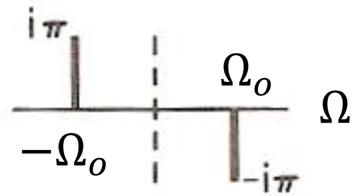
$$\cos(\Omega t) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\Omega\tau)}{(t-\tau)}d\tau$$

i·sgn(ω) × cosine spectrum = −sine spectrum

$$-\sin(\Omega t) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\Omega\tau)}{(t-\tau)}d\tau$$

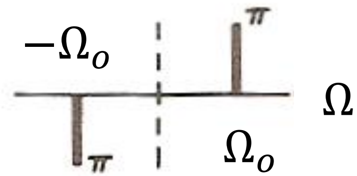
Espectro de la Función Exponencial Compleja

Espectro del sin(Ωt)



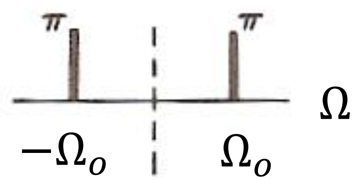
$$i\pi\delta(\Omega+\Omega_o)-i\pi\delta(\Omega-\Omega_o)$$

Espectro de i sin(Ωt)



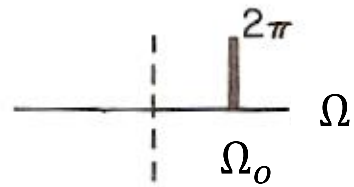
$$-\pi\delta(\Omega+\Omega_o)+\pi\delta(\Omega-\Omega_o)$$

Espectro del cos(Ωt)



$$\pi\delta(\Omega+\Omega_o)+\pi\delta(\Omega-\Omega_o)$$

Espectro del cos(Ωt)+i sin(Ωt)



$$2\pi\delta(\Omega-\Omega_o)$$

$$\cos(\Omega t)+i\ \sin(\Omega t)=e^{i\Omega t}\Leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_o)$$

La Función Analítica

Podemos escribir a la función exponencial compleja de la siguiente forma:

$$e^{i\Omega t} = \cos(\Omega t) + i \times \sin(\Omega t) = \cos(\Omega t) - i.HT\left\{\cos(\Omega t)\right\}$$

Teniendo presente que cualquier función se puede expresar como una suma escalada de exponenciales complejas, generalicemos esta idea y creemos una función compleja a partir de una función real, cuya parte imaginaria tenga un retardo en fase de 90° respecto de su parte real, es decir:

$$\boxed{g(t) = f(t) - i \times HT\left\{f(t)\right\}}$$

La función $g(t)$ es conocida como función analítica asociada a $f(t)$. Del mismo modo como la transformada de Fourier de la función exponencial compleja es causal, la transformada de Fourier es la función analítica es causal también.

La Función Analítica

$$FT\left\{g(t) = f(t) - i.TH\left\{f(t)\right\}\right\}$$

$$G(\Omega) = F(\Omega) - i\left[i.\mathrm{sgn}(\Omega)\right]F(\Omega)$$

$$G(\Omega) = F(\Omega)\left[1 + \mathrm{sgn}(\Omega)\right]$$

$$G(\Omega) = \begin{cases} 2F(\Omega) & \text{si} \quad \Omega > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \Omega < 0 \end{cases}$$

Dada una función en tiempo cuya parte imaginaria sea igual a menos la transformada de Hilbert de su parte real, su transformada de Fourier será causal.

Análogamente, si una función temporal es causal, la parte real e imaginaria de su transformada de Fourier estarán vinculadas por la transformada de Hilbert.

La Función Envolvente

Se define a la envolvente $E(t)$ de una función $f(t)$ como el módulo de su función analítica:

$$E(t) = \left|g(t)\right| = \sqrt{f(t)^2 + \left(HT\left\{f(t)\right\}\right)^2}$$

En aquellos puntos donde la función y su envolvente se tocan, la envolvente $E(t)$ será tangente a la función $f(t)$. Dado que la envolvente es claramente mayor o igual que la función en todo punto, la envolvente circunscribe a la función, propiedad que le da su nombre.

Transformada Generalizada de Hilbert

Aplicar un adelanto arbitrario de la fase ε, es decir multiplicar en el dominio de las frecuencias por $e^{i\varepsilon\times\operatorname{sgn}(\Omega)}$, es conocido como transformada generalizada de Hilbert:

$$GHT\left\{ f(t),\varepsilon\right\} = \cos\left(\varepsilon\right)\times f(t) + \sin\left(\varepsilon\right)\times HT\left\{ f(t)\right\}$$

$$\boxed{f^{\varepsilon}(t) = \cos\left(\varepsilon\right)\times f(t) + \sin\left(\varepsilon\right)\times f^{\frac{\pi}{2}}(t)}$$

Es fácil de ver que la aplicación de la transformada generalizada de Hilbert no modifica a la función envolvente. Es decir que la función envolvente de $f(t)$, circunscribirá a todas las funciones $f^{\varepsilon}(t)$ que se obtengan aplicando un adelanto constante y arbitrario de la fase.

Coeficientes de reflexión complejos

Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad con un ángulo mayor al ángulo crítico, la expresión que nos permite obtener el coeficiente de reflexión nos da un valor complejo. En esta situación no se transmite energía a la capa subyacente, toda la energía es reflejada hacia arriba. Esto es llamado reflexión interna total, y a diferencia de las reflexiones precríticas en las que la forma de onda no cambia, en las reflexiones postcríticas la forma de la onda es distorsionada. Esto se produce por la multiplicación con un coeficiente de reflexión complejo $r = |r| \exp(i\varphi)$. En el dominio de las frecuencias esto es equivalente a multiplicar por $|r| \exp(i\varphi\, \Omega/|\Omega|)$ donde φ es el cambio de fase constante entre el rayo incidente y el reflejado. Un corrimiento de fase positivo para las frecuencias positivas y negativo para las frecuencias negativas produce un avance de la fase. El signo del corrimiento en fase debe cambiar para que la señal en frecuencia siga siendo hermitiana y para que en tiempo siga siendo real.

Un coeficiente de reflexión $r = i$ para las frecuencias positivas y $r = -i$ para las negativas, corresponde a un avance de la fase en $\pi/2$, es decir a la transformada de Hilbert. Un corrimiento φ arbitrario de la fase corresponde a la transformada generalizada de Hilbert. El signo del corrimiento en fase depende del signo de la exponencial compleja utilizado en la definición de la transformada de Fourier.

Amplitud, Fase y Frecuencias Instantáneas

La amplitud instantánea de una señal no es otra cosa que la función envolvente $E(t)$.

Se define a la fase instantánea $\varphi_{inst.}$(t) de una señal $f(t)$ como:

$$\varphi_{inst}(t) = -arctg\left(\frac{f^{\frac{\pi}{2}}(t)}{f(t)}\right)$$

La función y su transformada de Hilbert se pueden expresar en función de la envolvente y de la fase instantánea del siguiente modo:

$$f(t) = E(t) \times \cos\left(\varphi_{inst.}(t)\right)$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = -E(t) \times \sin\left(\varphi_{inst.}(t)\right)$$

La frecuencia instantánea está dada por la derivada de la fase instantánea respecto del tiempo:

$$\Omega_{inst.}(t) = \frac{d\varphi_{inst.}}{dt}$$

Descomposición Par / Impar

Toda función $f(t)$ se puede descomponer como la suma de una función par $f_p(t)$, más una función impar $f_i(t)$:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

Donde:

$$\begin{cases} f_p(t) = \dfrac{f(t) + f(-t)}{2} \\ f_i(t) = \dfrac{f(t) - f(-t)}{2} \end{cases}$$

Si $f(t)$ es una función real, cuya transformada de Fourier está dada por:

$$FT\{f(t)\} = F(\Omega) = \mathrm{Re}\{F(\Omega)\} + i\,\mathrm{Im}\{F(\Omega)\}$$

Entonces por las propiedades de simetría de la transformada de Fourier:

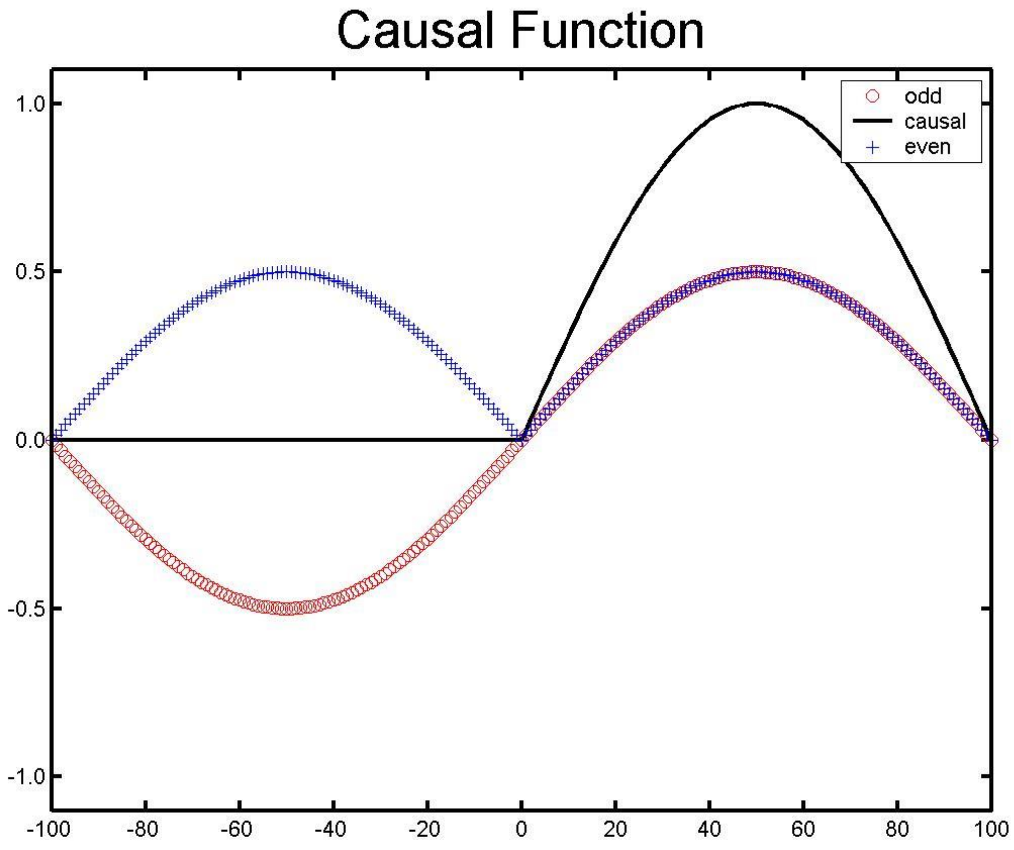
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\{F(\Omega)\} = FT\{f_p(t)\} = F_p(\Omega) \\ i\,\mathrm{Im}\{F(\Omega)\} = FT\{f_i(t)\} = F_i(\Omega) \end{cases}$$

Espectro de una Función Real y Causal

Si $f(t)$ es una señal real y causal, es fácil de ver que:

$$f_p(t) = \mathrm{sgn}(t) \times f_i(t)$$

$$f_i(t) = \mathrm{sgn}(t) \times f_p(t)$$



Espectro de una Función Real y Causal

Si $f(t)$ es una señal real y causal, entonces:

$$f_p(t) = \mathrm{sgn}(t) \times f_i(t)$$

$$f_i(t) = \mathrm{sgn}(t) \times f_p(t)$$

Tomando transformada de Fourier a esta ecuaciones, teniendo en cuenta que $\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \dfrac{2}{i\Omega}$, obtenemos:

$$F_p(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * F_i(\Omega)$$

$$F_i(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * F_p(\Omega)$$

La TF de las funciones pares e impares son iguales a la parte real y a la parte imaginaria respectivamente, de la TF de la función original, entonces obtenemos:

$$\mathrm{Re}\, F(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * i\,\mathrm{Im}\, F(\Omega)$$

$$i\,\mathrm{Im}\, F(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * \mathrm{Re}(\Omega)$$

Espectro de una Función Real y Causal

$$\operatorname{Re} F(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * i \operatorname{Im} F(\Omega)$$

$$i \operatorname{Im} F(\Omega) = \frac{2}{i\Omega} * \operatorname{Re}(\Omega)$$

Teniendo en cuenta que cuando convolucionamos en el dominio de las frecuencias nos aparece un factor $1/2\pi$, obtenemos:

$$\operatorname{Re} F(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(\upsilon)}{\Omega - \upsilon} d\upsilon = -HT\left\{\operatorname{Im} F(\Omega)\right\}$$

$$\operatorname{Im} F(\Omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} F(\upsilon)}{\Omega - \upsilon} d\upsilon = HT\left\{\operatorname{Re} F(\Omega)\right\}$$

Esto demuestra que si la función $f(t)$ es real y causal, la parte real y la parte imaginaria de su transformada de Fourier, están vinculadas por la transformada de Hilbert.

Del mismo modo si la parte real e imaginaria de la TF de una función están vinculadas por la transformada de Hilbert, la función debe ser necesariamente causal.

La Transformada de Hilbert y la Transformada Discreta de Fourier

Si tratamos de aplicar lo discutido hasta ahora sobre la transformada de Hilbert a señales digitales y queremos aprovechar las ventajas de la transformada discreta de Fourier, nos encontramos con dos problemas. El primero es qué queremos decir con causalidad, ya que cuando utilizamos TDF las señales son periódicas en ambos dominios y por lo tanto no pueden ser causales. Sin embargo, definiremos causalidad en el contexto de la TDF como aquella señal discreta que es cero en la primera mitad de cada período. El segundo problema está relacionado con el teorema de “Banda Limitada / Tiempo Limitado”. Por este teorema sabemos que la señal que no se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$ en un dominio, tendrá que hacerlo en el otro dominio. Por lo tanto una señal causal en el dominio del tiempo tendrá que contener necesariamente todas las frecuencias, lo cual nos lleva a preguntarnos: ¿Cómo podremos implementar la transformada de Hilbert mediante la Transformada Discreta de Fourier?

La Transformada de Hilbert y la Transformada Discreta de Fourier

La respuesta es que la “Transformada Ideal de Hilbert”, del mismo modo que un filtro pasa-bajos ideal o filtro diferenciador ideal, son conceptos valiosos en la teoría del continuo que sólo pueden ser implementados de manera aproximada en forma digital. El diseño de operadores digitales que apliquen la transformada discreta de Hilbert deberá realizarse con las mismas técnicas que describimos para diseñar filtros de frecuencias, como por ejemplo el uso de ventanas o zonas de transición. Debido a que el operador en tiempo que aplique la transformada ideal de Hilbert será infinitamente largo a causa de la discontinuidad de su respuesta en frecuencia en el origen, cualquier implementación práctica del operador discreto deberá truncarla de alguna manera, dando únicamente resultados aproximados. La respuesta en frecuencia del operador truncado tendrá la respuesta en fase exacta, pero la respuesta en amplitud tendrá ripple. La alternativa es realizar la transformada de Hilbert en el dominio de las frecuencias tolerando los errores introducidos por la transformada discreta de Fourier.

El Operador Ideal de la Transformada Discreta de Hilbert

La respuesta impulsiva infinita de la Transformada Discreta de Hilbert es lo que se denomina un filtro digital de cuadratura q_n. Su respuesta en frecuencia ideal está dada por:

$$Q(\omega) = e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{|\omega|}} = i\frac{\omega}{|\omega|} = i \times \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} +i & \text{si} \quad 0 < \omega < \pi \\ -i & \text{si} \quad -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

Como sabemos $Q(\omega)$ es una función continua y periódica de la frecuencia de período 2π, y su transformada discreta inversa está dada por:

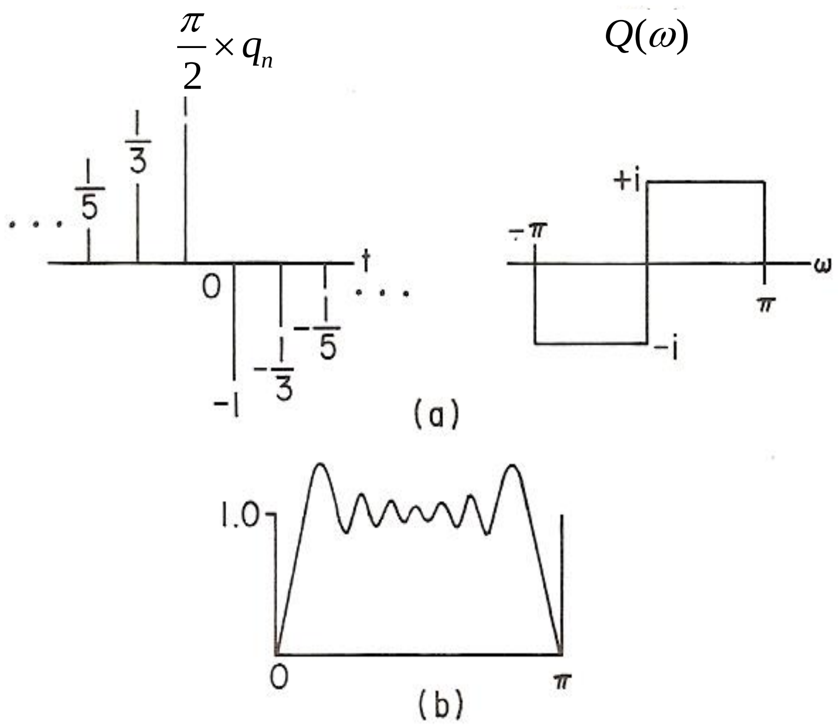
$$q_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Q(\omega) e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (-i) e^{i\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\pi} (i) e^{i\omega n} d\omega$$

$$q_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} i e^{+i\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} i e^{-i\omega n} d\omega = \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(e^{+i\omega n} - e^{-i\omega n}\right) d\omega$$

$$q_n = \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(\omega n)\, d\omega = \frac{1}{\pi n}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

$$\boxed{q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par o cero} \\ -2/\pi \text{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}} \qquad -\infty < n < +\infty$$

El Operador Ideal de la Transformada Discreta de Hilbert



(a) El operador discreto ideal y su espectro. (b) El espectro de amplitud del operador truncado. Su espectro de fase es exacto.

Relación entre los espectros de amplitud y de fase de una señal de fase mínima

Consideremos el siguiente dipolo de fase mínima:

$$x_n = (1, -\alpha) \qquad \text{donde } |\alpha| < 1$$

Su transformada Z está dada por:

$$X(z) = 1 - \alpha z$$

Tomemos el logaritmo natural de la transformada Z:

$$\hat{X}(z) = \ln(1 - \alpha z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^n$$

Este desarrollo en serie es convergente si $|\alpha| < 1$.

Ahora tomemos transformada Z inversa:

$$\hat{x}_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \le 0 \\ -\dfrac{\alpha^n}{n} & \text{si} \quad n \ge 1 \end{cases}$$

Es decir que si x_n es de fase mínima, entonces $\hat{x}_n$ es causal.

Relación entre los espectros de amplitud y de fase de una señal de fase mínima

Si $\hat{x}_n$ es causal, entonces:

$$\operatorname{Re}\ \hat{X}(\omega) = HT\ \left\{\operatorname{Im}\hat{X}(\omega)\right\}$$

Pero como:

$$\hat{X}(\omega) = \ln\left[X(\omega)\right] = \ln\left|X(\omega)\right| + i \times \arg\left[X(\omega)\right] = \ln\left|X(\omega)\right| + i \times \phi_x(\omega)$$

Entonces si x_n es de fase mínima:

$$\boxed{\ln\left|X(\omega)\right| = HT\left\{\phi_x(\omega)\right\}}$$

Relación entre los espectros de amplitud y de fase de una señal de fase mínima

Esta demostración se puede generalizar para una secuencia de fase mínima de longitud arbitraria:

$$x_n = \left(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1} \right)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^n = \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \alpha_k z \right) \qquad \text{si} \quad x_0 = 1$$

$$\hat{X}(z) = \ln\left[X(z) \right] = \ln\left[\prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \alpha_k z \right) \right] = \sum_{k=1}^{N-1} \ln\left(1 - \alpha_k z \right)$$

Si $\left| \alpha_k \right| < 1$ para $k = 1, N-1$, entonces:

$$\hat{X}(z) = \ln\left[X(z) \right] = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_k^n}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{-\alpha_k^n}{n} z^n$$

Tomando transformada Z inversa obtenemos:

$$\hat{x}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \le 0 \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k^n}{n} & \text{si } n \ge 0 \end{cases}$$

Relación entre los espectros de amplitud y de fase de una señal de fase mínima

Es decir que si x_n de longitud arbitraria N es de fase mínima, entonces $\hat{x}_n$ es causal, por lo tanto el logaritmo natural del espectro de amplitud está relacionado con el espectro de fase por la transformada de Hilbert, es decir:

$$\boxed{\ln\left|X(\omega)\right| = HT\left\{\phi_x(\omega)\right\}} \qquad \text{si } x_n \text{ es de fase mínima.}$$

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press.
- Claerbout, Jon F. (1992), Earth Sounding Analysis, Processing versus Inversion, Blackwell Scientific Publications