Análisis de Señales en Geofísica

9° Clase

Filtros Inversos y Deconvolución

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Filtros Inversos y Deconvolución

$$x_n \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Instrumento}\\ h_n\end{array}} \rightarrow y_n = x_n * h_n$$

$$y_n = x_n * h_n$$

$$y_n * h_n^{-1} = x_n * h_n * h_n^{-1} = x_n * \delta_n = x_n$$

$$h_n * h_n^{-1} = \delta_n$$

x_n : señal que queremos resgistrar

h_n : respuesta impulsiva del instrumento

y_n : señal registrada

h_n^{-1} : operador inverso de h_n

Inversas exactas utilizando TDF

Convolucionar en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar en el dominio de las frecuencias. Es decir, que para remover el efecto de la convolución deberíamos dividir en el dominio de las frecuencias.

Dado un operador de convolución en tiempo f_n queremos hallar el operador inverso f_n^{-1}, tal que:

$$f_n * f_n^{-1} = \delta_n$$

Tomamos TDF:

$$F_k \times F_k^{-1} = 1$$

$$\text{Si } F_k = \left|F_k\right| \times e^{i\phi_k} \;\Rightarrow\; F_k^{-1} = \frac{1}{\left|F_k\right|} \times e^{-i\phi_k}$$

El filtro inverso f_n^{-1} está dado por:

$$f_n^{-1} = TDF^{-1}\left\{F_k^{-1}\right\} \qquad \text{Si algún } F_k = 0 \;\Rightarrow\; f_k^{-1} \nexists$$

Este razonamiento está basado en el teorema de convolución de la TDF, el cual sólo es válido para convolución circular. En aquellas situaciones en las que el tipo de convolución involucrada es la circular, es posible encontrar la inversa exacta por medio de la TDF. Esto no es válido para convolución lineal.

Inversas exactas utilizando TDF

Si convolucionamos una secuencia periódica con otra secuencia que no es periódica, el resultado del producto de convolución también es periódico y la inversa puede encontrarse por medio de la TDF. Si la secuencia periódica tiene un período mayor que la longitud de la señal no periódica, debemos agregar ceros a la secuencia no periódica hasta alcanzar el período de la secuencia periódica, luego de hacer esto es posible invertir en forma exacta cualquiera de las dos secuencias. Si la secuencia periódica tiene un período menor que la longitud de la secuencia no periódica, debemos repetir la secuencia periódica hasta alcanzar la longitud de la secuencia no periódica, pero en esta situación la secuencia periódica no puede ser invertida ya que tendrá elementos nulos en el dominio de las frecuencias, porque repetir una secuencia en el dominio del tiempo es equivalente a entrelazar ceros en el dominio de las frecuencias, y si tiene elementos nulos en el dominio de las frecuencias no puede ser invertida.

El problema de deconvolución con al menos una de las secuencias periódicas, son casos afortunados en los cuales pueden calcularse inversas exactas por medio de la TDF.

Deconvolución Lineal

Cuando ninguna de las dos secuencias convolucionadas son periódicas, el problema de deconvolución no admite una solución exacta, solo admite soluciones aproximadas. Podemos utilizar la TDF para emular la convolución lineal agregando ceros al final de las secuencias, pero como el operador inverso es siempre de longitud infinita deberíamos agregar una inmensa cantidad de ceros, tantos más cuanto más tarde el operador inverso en converger. Pero al aplicar la transformada inversa para obtener el operador inverso, inevitablemente siempre se producirá aliasing en tiempo.

Si el operador que queremos invertir no es de fase mínima, el operador inverso será no causal, por lo tanto no solo deberemos agregar ceros al final de la secuencia sino también delante de ella, para darle lugar a la componente anticipatoria.

Cuanto mayor sea la cantidad de ceros que agreguemos más se aproximará la inversa obtenida con la TDF a la inversa obtenida por medio de la serie geométrica que vimos al estudiar la transformada Z, si no agrego ceros o agrego pocos ceros estas inversas serán totalmente diferentes.

Deconvolución Lineal

Veamos que la precisión del operador inverso está limitada además por otras razones. La convolución de un operador f_n de longitud 3 y una secuencia x_n de longitud 5 se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la secuencia y_n y el operador f_n son conocidos y que deseamos deconvolucionar f_n para obtener la secuencia x_n. Tenemos 7 ecuaciones y 5 incógnitas, es decir que es posible resolver el problema. En el caso de convolución circular los ceros son reemplazados por elementos repetidos de la misma secuencia.

Deconvolución Lineal

En la mayoría de los problemas en los que se encuentra involucrada la convolución lineal debemos reemplazar los ceros de los extremos por información desconocida:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \\ x_5 & x_4 & x_3 \\ x_6 & x_5 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Es decir que tendremos 7 ecuaciones con 9 incógnitas, por lo tanto el problema no puede ser resuelto.

Filtro Wiener

Dada una secuencia x_n de longitud M, queremos diseñar un operador f_n de longitud N que al convolucionarlo con x_n nos dé una salida deseada d_n de longitud $N+M-1$, la salida real del filtro no será exactamente la deseada sino que será $y_n \approx d_n$:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad \rightarrow d_n \\ x_n \rightarrow \boxed{\; f_n \;} \rightarrow y_n = x_n * f_n \end{array}$$

Queremos que el operador f_n sea óptimo en el sentido de los cuadrados mínimos, para ello planteamos la siguiente función objetiva a minimimzar:

$$\theta(f_n) = \sum_{k=0}^{N+M-2} \left(d_k - y_k\right)^2 = \text{mínimo}$$

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_{k-j} \qquad\qquad k = 0, N+M-2$$

$$\theta(f_n) = \sum_{k=0}^{N+M-2} \left(d_k - \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_{k-j} \right)^2 = \text{mínimo}$$

Filtro Wiener

$$\theta(f_n) = \sum_{k=0}^{N+M-2} \left(d_k - \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_{k-j} \right)^2 = \text{mínimo}$$

Derivamos respecto de los coeficientes f_i del filtro:

$$\frac{\partial \theta}{\partial f_i} = \sum_{k=0}^{N+M-2} (-2).\left(d_k - \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_{k-j} \right).x_{k-i} = 0 \qquad i = 0, N-1$$

$$\sum_{k=0}^{N+M-2} d_k x_{k-i} - \sum_{k=0}^{N+M-2} \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_{k-j} x_{k-i} = 0 \qquad i = 0, N-1$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j \sum_{k=0}^{M+N-2} x_{k-j} x_{k-i} = \sum_{k=0}^{M+N-2} d_k x_{k-i} \qquad i = 0, N-1$$

Filtro Wiener

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j \sum_{k=0}^{M+N-2} x_{k-j} x_{k-i} = \sum_{k=0}^{M+N-2} d_k x_{k-i} \qquad i = 0, N-1$$

$$\sum_{k=0}^{N+M-2} d_k x_{k-i} = \phi_{dx}(-i) = \phi_{xd}(i)$$

$$\sum_{k=0}^{N+M-2} x_{k-j} x_{k-i} = \sum_{l=-j}^{N+M-2-j} x_l x_{l+j-i} = \sum_{l=0}^{M-1} x_l x_{l+j-i} = \phi_{xx}(j-i)$$

Hacemos el cambio de variables $l = k - j$, y teniendo en cuenta que: $x_l = 0$ para $l < 0$, y $x_l = 0$ para $l > M-1$. Finalmente reemplazando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \phi_{xx}(j-i) f_j = \phi_{xd}(i) \qquad i = 0, N-1$$

Filtro Wiener

$$\sum_{j=0}^{N-1} \phi_{xx}(j-i) f_j = \phi_{xd}(i) \qquad\qquad i = 0, N-1$$

Esto mismo expresado matricialmente nos queda:

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \dots & \phi_{xx}(N-1) \\ \phi_{xx}(-1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(N-2) \\ \phi_{xx}(-2) & \phi_{xx}(-1) & \phi_{xx}(0) & \dots & \phi_{xx}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}(1-N) & \phi_{xx}(2-N) & \phi_{xx}(3-N) & \dots & \phi_{xx}(0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xd}(0) \\ \phi_{xd}(1) \\ \phi_{xd}(2) \\ \vdots \\ \phi_{xd}(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{xx} f = \Phi_{xd}$$

Donde Φ_{xx} es la matriz de autocorrelación de la secuencia x_n, el vector columna f contiene los elementos del operador f_n y Φ_{xd} es el vector de correlación cruzada entre la entrada x_n y la salida deseada d_n. Este sistema recibe el nombre de sistema de ecuaciones normales.

Filtro Wiener

El operador f_n es conocido como filtro Wiener en honor a Norbet Wiener, famoso matemático del MIT. Minimizar la norma L2 es totalmente arbitrario , podríamos haber minimizado la norma L1 o haber propuesto cualquier otro criterio de optimización como por ejemplo el de Chebyshev o minimax, sin embargo la norma L2 es muy conveniente porque nos da una solución simple y fácil de obtener. Desde el punto de vista estadístico minimizar la norma L2 es equivalente a considerar que los errores $\left(d_n - y_n\right)$ tienen una distribución normal o Gaussiana. Si la secuencia x_n es real la autocorrelación es una función par y la matriz de autocorrelación es simétrica. Observe que los elementos ubicados en la misma diagonal de la matriz de autocorrelación son iguales, una matriz con esta estructura es denominada matriz de Toeplitz. Cuando N es grande es posible resolver este sistema de ecuaciones con una matriz de Toeplitz utilizando el algoritmo de Levinson. Este algoritmo recursivo explota la simetría de la matriz de Toeplitz para encontrar la solución de manera sumamente eficiente tanto en tiempo como en el uso de memoria, sin invertir la matriz.

Filtro Wiener

El filtro Wiener se puede deducir utilizando álgebra matricial de la siguient manera:

$$\left\| Xf - d \right\|_2^2 = \text{mínimo}$$

Donde X es la matriz de convolución de la secuencia x_n, f es un vector columna que contiene lo elementos del filtro Wiener y d es un vector columna que contiene la salida deseada d_n. Derivamos respecto de f :

$$\frac{\partial}{\partial f} \left\| Xf - d \right\|_2^2 = 0$$

$$\cancel{2} X^T \left(Xf - d \right) = 0$$

$$X^T Xf - X^T d = 0$$

$$X^T Xf = X^T d$$

$$f = \left(X^T X \right)^{-1} X^T d = \Phi_{xx}^{-1} \Phi_{xd}$$

Donde $X^T X = \Phi_{xx}$ es la matriz de autocorrelación de x_n y $X^T d = \Phi_{xd}$ es el vector de correlación cruzada entre x_n y la salida deseada d_n.

Filtro Wiener Inverso

Cuando la salida deseada de un filtro Wiener es un impulso unitario, hablamos de filtro Wiener inverso. Es decir, obtendremos un filtro inverso de longitud finita N que será óptimo en el sentido de los cuadrados mínimos. Un filtro inverso con estas características hará un mejor trabajo que el filtro inverso de longitud infinita pero truncado a la misma longitud N. Es decir que la suma de los errores al cuadrado será menor en el caso del filtro Wiener inverso que en el caso del filtro inverso truncado a la misma longitud.

Sin embargo para obtener el menor error cuadrático posible hay que cambiar el retardo del impulso unitario según la fase de la entrada x_n :

$$\text{fase mínima} \Rightarrow d_n = \delta_n$$

$$\text{fase cero} \Rightarrow d_n = \delta_{n-\left(\frac{N+M-1}{2}\right)}$$

$$\text{fase máxima} \Rightarrow d_n = \delta_{n-(N+M-1)}$$

$$\text{fase mixta} \Rightarrow d_n = \delta_{n-?}$$

¿Cuál es el retardo óptimo?

Si la entrada es de fase mixta debemos retardar el impulso unitario en función de qué parte del filtro inverso converge más rápidamente, si la parte causal o la parte anticausal.

Modelo de Convolución de la Traza Sísmica

El modelo de convolución de la traza sísmica es una idealización que nos permite representar una traza sísmica x_t como la convolución entre una ondícula w_t o firma de la fuente, con una función de reflectividad r_t, más ruido blanco n_t :

$$x_t = w_t * r_t + n_t$$

Las hipótesis que se hacen al proponer este modelo de convolución son las siguientes:

- El subsuelo está constituido por capas horizontales, planas y paralelas de velocidad constante en cada una de ellas. Es decir, no existen variaciones laterales de velocidad, la velocidad solamente varía con la profundidad.
- La fuente genera una onda compresiva plana, que se propaga en la dirección vertical y que incide normalmente a las superficies de discontinuidad. Bajo estas circunstancias no se generan ondas de corte ni existe divergencia geométrica. La reflectividad será la correspondiente a incidencia normal:

$$r_i = \frac{\rho_{i+1} v_{i+1} - \rho_i v_i}{\rho_{i+1} v_{i+1} + \rho_i v_i}$$

- La ondícula no cambia su forma ni su energía a medida que se propaga por el subsuelo. Es decir la ondícula es estacionaria. No se considera ningún tipo de atenuación anelástica.

Aplicación del Filtro Wiener al Modelo de Convolución de la Traza Sísmica

Queremos diseñar un filtro Wiener inverso que convierta una ondícula de fase mínima en un impulso unitario a lag cero, es decir:

$$\theta(f) = \|Wf - \delta\|_2^2 = \text{mínimo}$$

Sabemos que el filtro Wiener inverso que intentará hacer este trabajo, está dado por:

$$f = \left(W^T W\right)^{-1} W^T \delta = \Phi_{ww}^{-1} \Phi_{w\delta}$$

En el lenguaje de exploración sísmica a esta deconvolución se la denomina deconvolución impulsiva de fase mínima (minimum phase spiking deconvolution).

Al aplicar el operador f a la traza sísmica lograremos remover parcialmente el efecto de la ondícula y que la traza sísmica se parezca un poco más a la reflectividad. En realidad lo que lograremos será colapsar la ondícula, es decir, reemplazarla por una ondícula más corta y así mejorar la resolución sísmica, pero no lograremos remover completamente a la ondícula y recuperar la reflectividad.

Regularización de Tikonov

El espectro de amplitud del operador de deconvolución es aproximadamente el inverso del espectro de amplitud de la ondícula. Si el espectro de amplitud de la ondícula se hace cero para alguna frecuencia, el espectro de amplitud del operador de deconvolución tenderá a infinito para esa frecuencia. Cuando esto sucede la matriz de autocorrelación de la ondícula Φ_{ww} es una matriz singular que no admite inversa. Para evitar este problema y estabilizar la solución debemos introducir un término de regularización en la función objetiva a minimizar, lo cual es equivalente a sumarle ruido blanco no correlacionable a la ondícula o a la traza sísmica.

Existen diferentes criterios por los que se puede optar a la hora de elegir la regularización que estabiliza a la solución. El tipo de regularización que utilizaremos es conocido como regularización de **Tikonov** y consiste en agregar el siguiente término a la función objetiva a minimizar:

$$\theta(f) = \|Wf - \delta\|_2^2 + \alpha \| f \|_2^2 = \text{mínimo}$$

Regularización de Tikonov

$$\theta(f) = \|Wf - \delta\|_2^2 + \alpha\|If\|_2^2 = \text{mínimo}$$

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(\|Wf - \delta\|_2^2 + \alpha\|If\|_2^2\right) = 0$$

$$2W^T\left(Wf - d\right) + 2\alpha If = 0$$

$$\left(W^TW + \alpha I\right)f - W^Td = 0$$

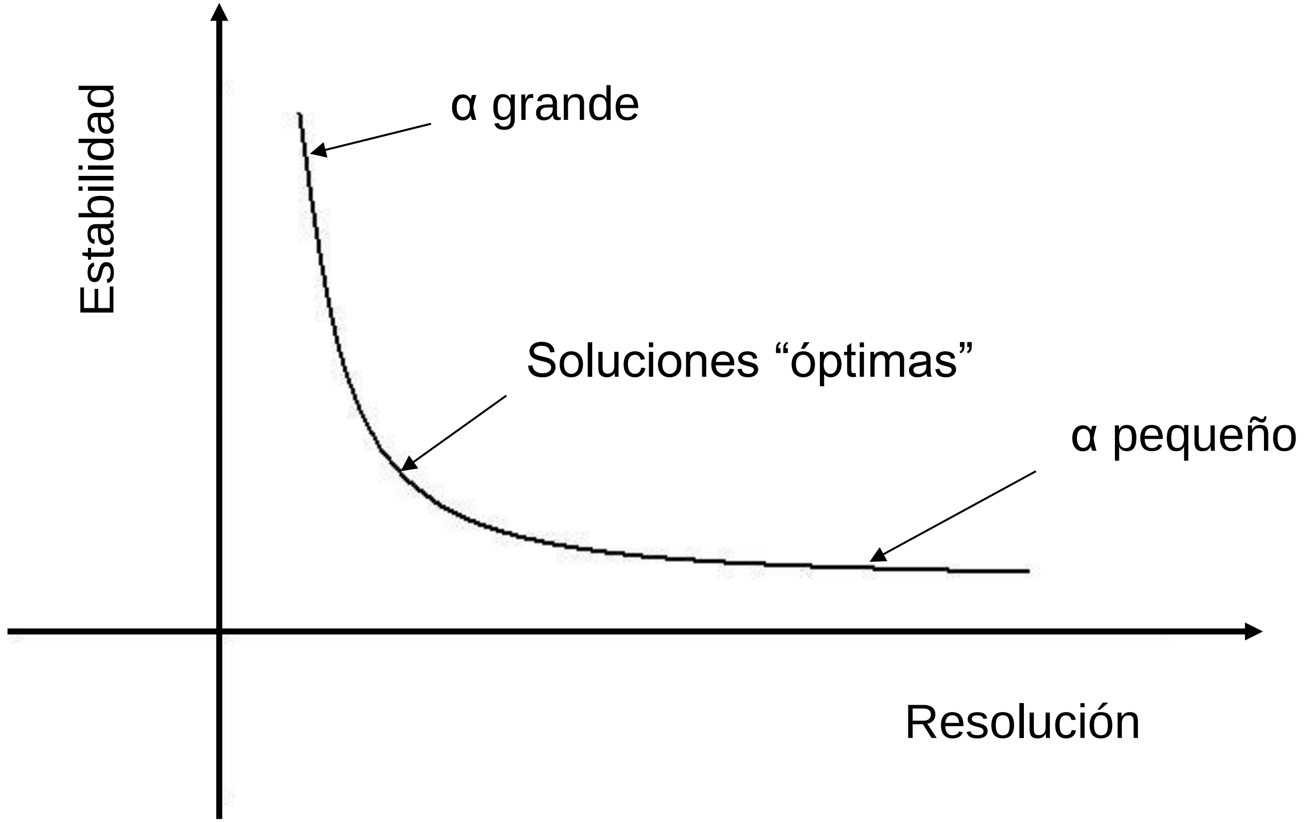
$$f = \left(W^TW + \alpha I\right)^{-1}W^Td$$

Buscamos un operador que trate de invertir la ondícula pero que a la vez tenga una norma L2 pequeña. El parámetro α tendrá el papel de un árbitro que equilibra la balanza entre resolución (colapso de la ondícula) y estabilidad. En exploración sísmica α se expresa como un porcentaje μ de la autocorrelación de la ondícula a lag cero:

$$\alpha = \mu\phi_{ww}(0)$$

El parámetro μ recibe el nombre de parámetro de preblanqueo porque produce el mismo efecto que sumarle ruido blanco no correlacionable a la ondícula.

Regularización de Tikonov



Deconvolución Estadística

Cuando conocemos la ondícula presente en la traza sísmica podemos calcular su autocorrelacion y en este caso hablamos de deconvolución determinística. Sin embargo, la mayoría de las veces no conocemos la ondícula y debemos estimar su autocorrelación mediante la autocorrelación de la traza sísmica, haciendo la hipótesis de que la reflectividad es una señal aleatoria no correlacionable.

Según el modelo de convolución de la traza sísmica:

$$x_t = w * r_t + n_t$$

Si tomamos la autocorrelación tenemos:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{rr}(\tau) * \phi_{ww}(\tau) + \phi_{nn}(\tau)$$

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{rr}(0) \times \delta(\tau) * \phi_{ww}(\tau) + \phi_{nn}(0) \times \delta(\tau)$$

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{rr}(0)\phi_{ww}(\tau) + \phi_{nn}(0) \times \delta(\tau)$$

Es decir que bajo esta hipótesis, la cual no es totalmente cierta, la autocorrelación de la traza sísmica es igual a la autocorrelación de la ondícula salvo un factor de escala $\phi_{rr}(0)$ más la autocorrelación de ruido blanco no correlacionable.

Filtros Predictivos

Queremos diseñar un filtro Wiener f_n de longitud N que cuando lo apliquemos a una secuencia nos permita predecir el valor siguiente de la secuencia:

$$f_0 x_n + f_1 x_{n-1} + f_2 x_{n-2} + f_3 x_{n-3} + \cdots + f_{n-1} x_{n-(N-1)} = x_{n+1}$$

O expresado matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 0 & \cdots \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es decir que queremos diseñar un filtro Wiener que al aplicarlo a una secuencia, la salida deseada sea la misma secuencia pero adelantada en una muestra.

Filtros Predictivos

Sabemos que el filtro Wiener buscado está dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \cdots & \phi_{xx}(N-1) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \cdots & \phi_{xx}(N-2) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \cdots & \phi_{xx}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}(N-1) & \phi_{xx}(N-2) & \phi_{xx}(N-3) & \cdots & \phi_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xx}(1) \\ \phi_{xx}(2) \\ \phi_{xx}(3) \\ \vdots \\ \phi_{xx}(N-1) \end{pmatrix}$$

Si la secuencia x_n es lo suficientemente predecible, el operador f_n nos permitirá obtener cada valor de la serie como una combinación lineal de los N valores anteriores. Que esto sea posible o no, dependerá de cuan determinística sea la secuencia x_n en comparación con sus componentes aleatorias. Por ejemplo, la secuencia $x_n = \exp(i\omega_0 n)$ es completamente determinística y podremos predecirla perfectamente con un operador de longitud dos, $x_n = 2\cos(\omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}$ por el contrario si x_n tiene una componente aleatoria muy importante, la predicción que podamos hacer con este operador será muy poco confiable. A todas la secuencias con igual autocorrelación les corresponderá el mismo operador predictivo, el cual sólo podrá predecir adecuadamente a la de fase mínima.

Filtros Predictivos de la componente aleatoria

Vamos a ampliar la matriz teniendo en cuenta que los elementos de una matriz pueden ser matrices también, escribamos una matriz en bloques de 2×2:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 0 & \cdots \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline -f_0 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ \vdots \\ -f_{N-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Es posible verificar que esta matriz es correcta escribiendo algunas ecuaciones del sistema, en general tendremos:

$$x_{n+1} - x_n f_0 - x_{n-1} f_1 - x_{n-2} f_{n-2} - \cdots - x_{n-(N-1)} f_{N-1} = 0$$

Si pasamos los términos que están restando al segundo miembro, nos queda la misma ecuación de predicción que planteamos inicialmente.

Filtros Predictivos de la componente aleatoria

$$x_{n+1} - x_n f_0 - x_{n-1} f_1 - x_{n-2} f_{n-2} - \cdots - x_{n-(N-1)} f_{N-1} = x_n * f_n^{pef} \approx 0$$

$$f_n^{pef} = \left(1, -f_0, -f_1, -f_2, -f_3, \cdots, -f_{N-1}\right)$$

Este operador en vez de predecir el valor siguiente de la secuencia, predice la diferencia en el valor original y el valor estimado con el filtro predictivo. Es decir, está prediciendo la componente aleatoria de la señal. Este operador es denominado *prediction error filter* o filtro predictivo del error.

Si planteamos el sistema de ecuaciones normales de este filtro, tendremos:

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \cdots & \phi_{xx}(N-1) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \cdots & \phi_{xx}(N-2) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \cdots & \phi_{xx}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}(N-1) & \phi_{xx}(N-2) & \phi_{xx}(N-3) & \cdots & \phi_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -f_0 \\ -f_1 \\ \vdots \\ -f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deconvolución Predictiva

Podemos ver que el sistema de ecuaciones normales del filtro predictivo del error es igual al sistema de ecuaciones normales del filtro de deconvolución impulsiva de fase mínima, salvo por un factor de escala x_0 de la salida deseada. El operador f_n^{pef} será igual al operador de deconvolución impulsiva salvo un factor de escala, este operador hará un buen trabajo si la secuencia x_n es de fase mínima, si ese no es el caso tendremos que diseñar operadores no causales. Si al diseñar el operador predictivo f_n, en vez de que la salida deseada sea la entrada adelantada en una muestra, hacemos que sea la entrada adelantada en M muestras, y luego al operador predictivo del error le ponemos detrás del 1 inicial $M-1$ ceros:

$$f_n^{pef} = \left(1,\underbrace{0,0,0,\cdots,0,}_{M-1 \text{ ceros}}-f_0,-f_1,-f_2,\cdots,-f_{N-1}\right)$$

Obtenemos lo que se denomina un gapped prediction error filter. En el lenguaje de exploración sísmica, este es un operador de deconvolución predictiva y se utiliza para atenuar reflexiones múltiples que se presentan M muestras después de la reflexión primaria.

Filtro Correlador

Queremos encontrar un operador que nos diga cuándo encuentra determinada señal que se encuentra sumergida en ruido. Cuando exista un solapamieto completo entre el filtro y la señal oculta queremos maximizar la salida del filtro, lo cual nos indicará la presencia de la señal. Claramente la longitud del operador debe ser igual a la longitud de la señal que estamos buscando. La convolución de la señal $s_n = \left(s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{N-1}\right)$ de longitud N con el filtro $f_n = \left(f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1}\right)$, también de longitud N, será de longitud $2N-1$. Definimos la relación señal ruido de la señal de salida como:

$$\alpha = \frac{\left(\text{potencia instantánea de salida cuando sólo la señal está presente en la entrada}\right)}{\left(\text{potencia de salida cuando sólo ruido está presente en la entrada}\right)}$$

Se puede demostrar que esta relación señal ruido será igual a:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_j s_{n-j} f_j\right)^2}{\sum_{i,j} \phi_{ij} f_i f_j}$$

donde ϕ_{ij} es la autocorrelación del ruido en el cual se encuentra sumergida la señal.

Filtro Correlador

Para encontrar el filtro que maximiza α tomamos las derivadas con respecto a los coeficientes del filtro:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial f_k} = 0$$

Lo cual nos conduce a la siguiente solución:

$$\sum_i \phi_{ik} f_i = s_{N-k}$$

Si la escribimos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \phi_0 & \cdots & \phi_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{N-1} & \cdots & \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{N-1} \\ \vdots \\ s_0 \end{pmatrix}$$

Si el ruido es blanco la matriz de autocorrelación del ruido se aproxima a la matriz identidad, en estas condiciones el filtro que estamos buscando no es más que la señal revertida. Pero convolucionar con la señal revertida es lo mismo que correlacionar con la señal sin revertir. Es decir que la operación que buscamos no es más que la correlación cruzada con la señal que queremos detectar. Este tipo de filtro se llama filtro correlador.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Nine.
- Yilmaz, O. (1987), Seismic Data Processing, Volume 2 of Investigations in Geophysics. SEG
- Hatton, L., Worthington, M.H. and Makin, J. (1986), Seismic Data Processing: Theory and Practice, Blackwell Scientific Publications.