Análisis de Señales en Geofísica

8° Clase

Diseño de Filtros Digitales

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Diseño de Filtros Digitales

Todos los sistemas lineales e invariantes pueden ser pensados como filtros. Sin embargo, cuando hablamos simplemente de "filtros", nos referimos a filtros de frecuencia. Es decir, un dispositivo analógico o un operador digital que al aplicarlo a una señal, o bien deja pasar o impide el paso de determinadas componentes de frecuencia de la señal.

La manera más sencilla de pensar un filtro de frecuencias es como la multiplicación en el dominio de la transformada de Fourier por una determinada respuesta en frecuencia deseada. Sin embargo, sabemos que el mismo resultado puede lograrse mediante la convolución en tiempo con la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia deseada.

Las respuestas en frecuencia ideales poseen discontinuidades, pero ni los dispositivos analógicos ni los operadores digitales de longitud finita pueden presentar discontinuidades en sus respuestas en frecuencias.

El diseño de filtros digitales consiste en obtener la respuesta impulsiva del filtro en el dominio del tiempo, que mejor se ajuste a determinada respuesta en frecuencia deseada.

Filtro Pasa-Bajos

Con el propósito de ejemplificar el problema veamos como diseñar un filtro pasa-bajos, es decir, un filtro que deje pasar las frecuencias menores a una determinada frecuencia de corte e impida el paso de las frecuencias superiores a ella.

El filtro pasa-bajos ideal está dado por:

$$H(\omega)^{\omega_C}_{pasa-bajos} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < |\omega| < \omega_C \\ 0 & \text{si} \quad \omega_C < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$h^{\omega_C}_{n\,pasa-bajos} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_C}^{\omega_C} 1 \times e^{i\omega n} d\omega = \frac{\omega_C}{\pi} \frac{\sin(\omega_C \times n)}{\omega_C \times n} \quad , \quad -\infty < n < \infty$$

Cualquier otro filtro pasa-altos o pasa-banda puede ser obtenido mediante simples operaciones con filtros pasa-bajos. Por ejemplo:

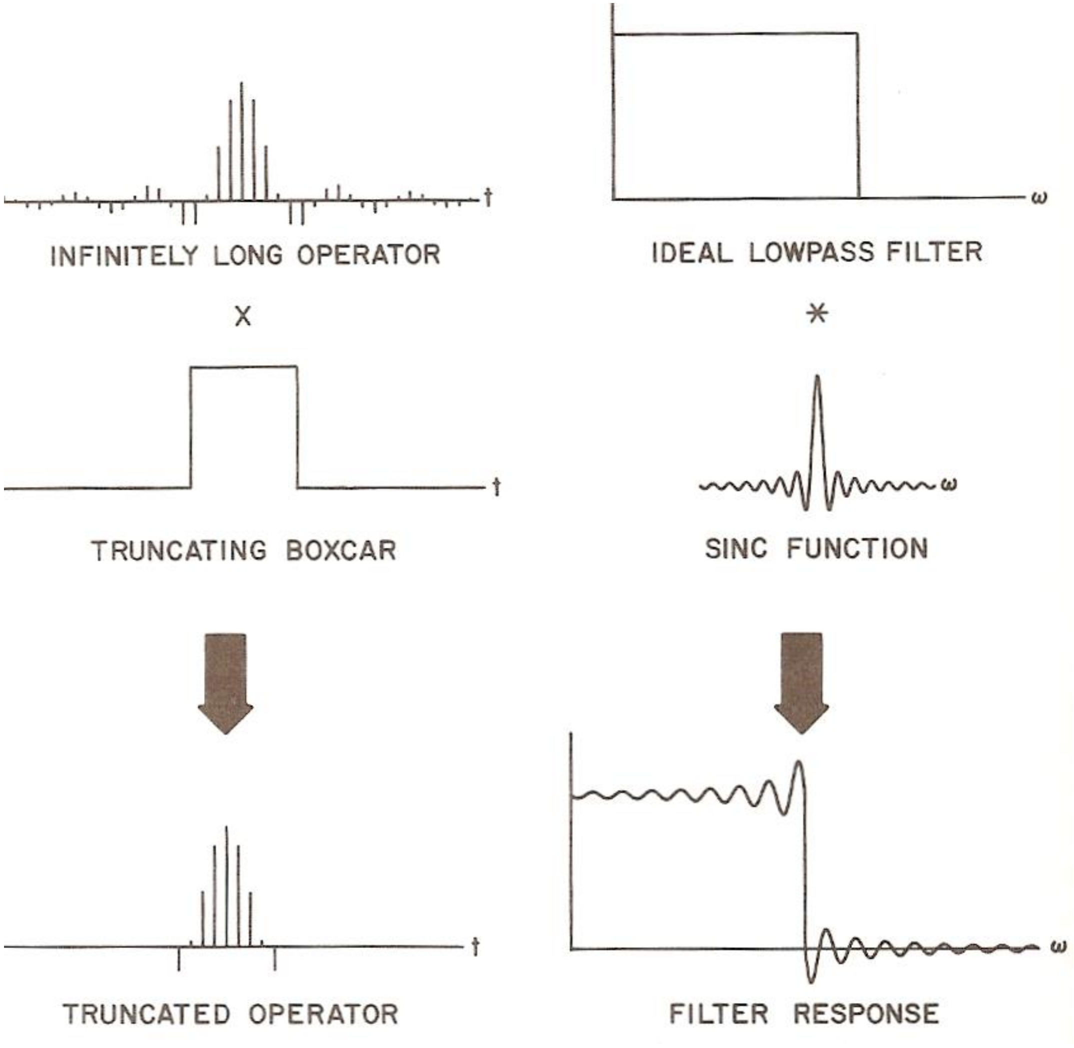
$$H(\omega)^{\omega_C}_{pasa-altos} = 1 - H(\omega)^{\omega_C}_{pasa-bajos}$$

$$h^{\omega_C}_{n\,pasa-altos} = \delta_n - h^{\omega_C}_{n\,pasa-bajos}$$

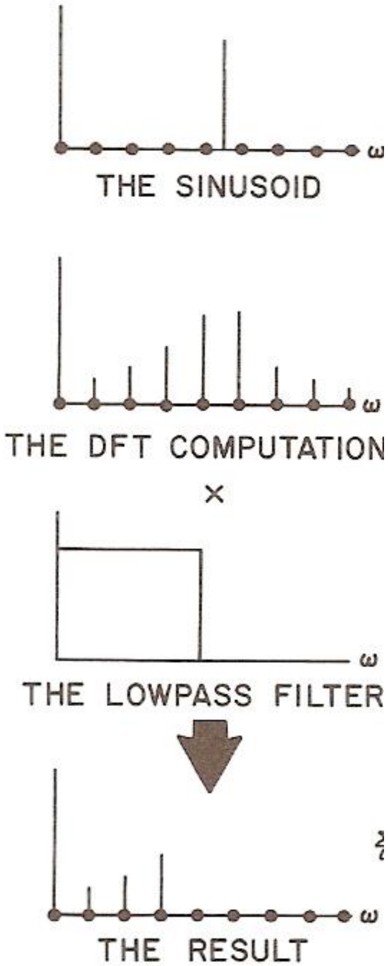
$$H(\omega)^{\omega_{CB}-\omega_{CA}}_{pasa-banda} = H(\omega)^{\omega_{CA}}_{pasa-bajos} - H(\omega)^{\omega_{CB}}_{pasa-bajos}$$

$$h^{\omega_{CB}-\omega_{CA}}_{n\,pasa-banda} = h^{\omega_{CA}}_{n\,pasa-bajos} - h^{\omega_{CB}}_{n\,pasa-bajos}$$

Filtro Pasa-Bajos



El problema



Para que la señal tenga una respuesta en frecuencia de alta resolución necesitamos observar la señal durante un tiempo infinitamente largo, de no ser así la energía de una señal monocromática se va a dispersar en las frecuencias vecinas.

Por otro lado para poder aislar esa frecuencia de las frecuencias vecinas necesitamos un filtro de frecuencias infinitamente largo en tiempo.

Nunca se cumplirán ninguna de las dos cosas. Es decir que por uno o por otro motivo nunca podremos aislar perfectamente una frecuencia.

Diseño de Filtros de Frecuencia Utilizando Zonas de Transición

Es posible diseñar filtros menos demandantes que los filtros ideales, que tengan una zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo. También podríamos hacer que no tengan una atenuación infinita en la banda de rechazo, sino que se aproximen asintóticamente a un valor pequeño. Al hacer esto la respuesta en tiempo del filtro decaerá más rápidamente y el error que cometemos al truncarlo será mucho menor.

Jugando con la longitud del filtro y el ancho de la zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, podemos lograr que los valores que truncados sean tan pequeños como querramos, hasta alcanzar valores y longitudes aceptables según nuestras necesidades. Pero nunca la respuesta en frecuencia del operador truncado será exactamente igual a la respuesta en frecuencia deseada, ya que esta última es de banda limitada y su respuesta en tiempo será siempre infinita.

Ventanas

En vez de truncar en forma abrupta una señal con una ventana rectangular o función cajón, podemos multiplicarla por otras ventanas más suaves que se atenúen más gradualmente en los bordes. Las respuestas en frecuencia de estas ventanas, tendrán una forma similar a un seno cardinal pero con un lóbulo central más ancho y con lóbulos laterales que se atenúan más rápidamente. Algunas de las ventanas más utilizadas son las siguientes:

$$\text{Bartlet:} \quad w_n = \begin{cases} 2n/(N-1) & 0 \le n \le (N-1)/2 \\ 2-2n/(N-1) & (N-1)/2 \le n \le (N-1) \end{cases}$$

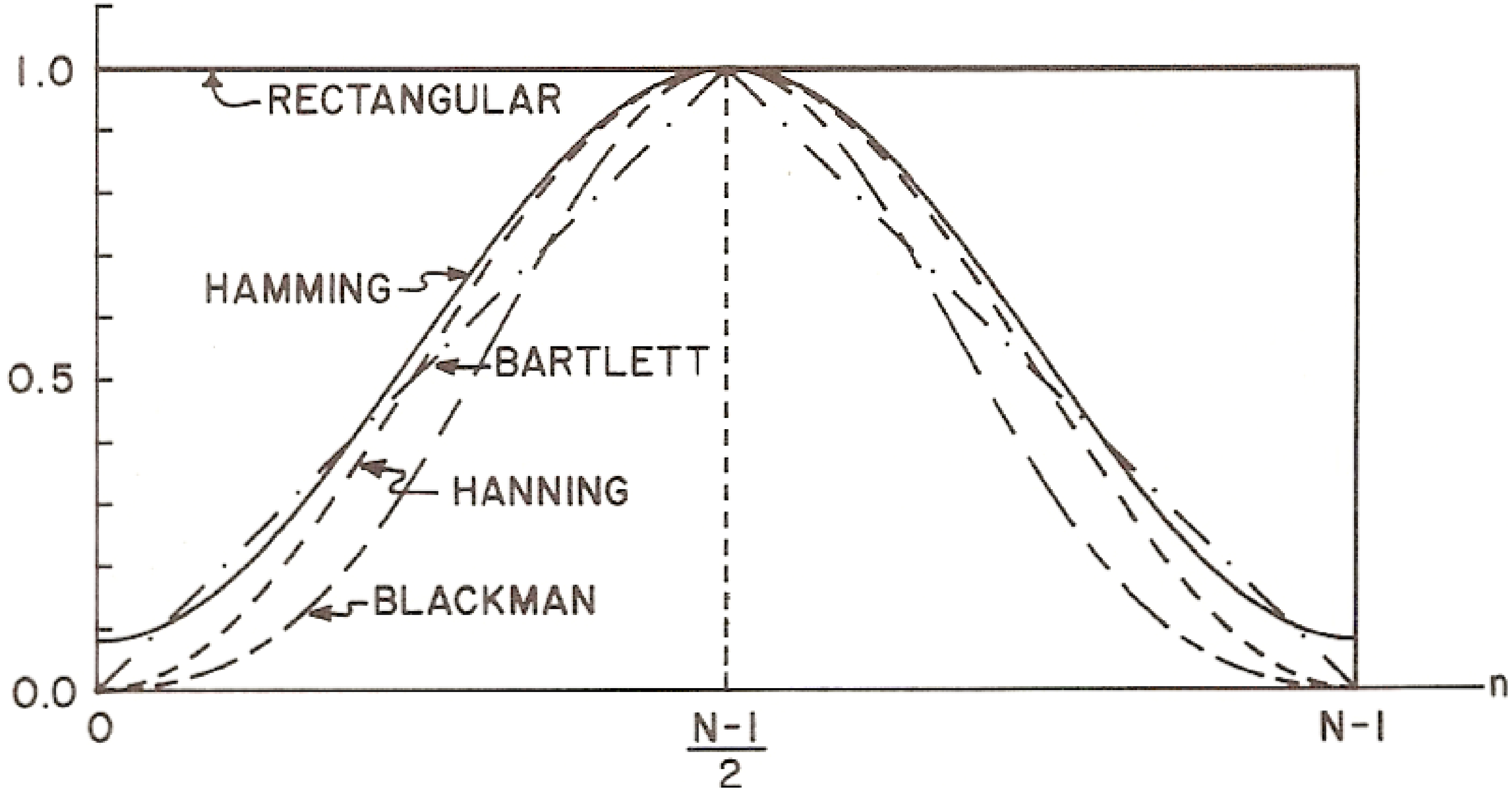
$$\text{Welch:} \quad w_n = 1 - \left(\frac{n - N/2}{N/2} \right)^2 \qquad 0 \le N \le (N-1)$$

$$\text{Hanning:} \quad w_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \cos\left[\frac{2\pi n}{(N-1)} \right]$$

$$\text{Hamming:} \quad w_n = 0.54 - 0.46 \times \cos\left[\frac{2\pi n}{(N-1)} \right]$$

$$\text{Blackman:} \quad w_n = 0.42 - 0.5 \times \cos\left[\frac{2\pi n}{(N-1)} \right] + 0.08 \times \cos\left[\frac{4\pi n}{(N-1)} \right]$$

Ventanas



1.0
0.5
0.0
RECTANGULAR
HAMMING
BARTLETT
HANNING
BLACKMAN
0
N-1
2
N-1
n

Diseño de Filtros de Frecuencias usando Ventanas en Tiempo

Este método consiste simplemente en truncar el operador ideal en tiempo, de longitud infinita, con una ventana con bordes menos abruptos que la ventana rectangular. Al hacer esto en tiempo, aparece en el dominio de la transformada de Fourier, una zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, y además se produce una disminución en la amplitud del ripple.

Dada la respuesta ideal en frecuencia $H(\omega)$, la respuesta impulsiva del filtro ideal en tiempo está dada por:

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

Truncamos h_n de longitud infinita con una ventana w_n de longitud finita que produzca una respuesta en frecuencia aceptable:

$$\hat{h}_n = h_n \times w_n$$

En el dominio de las frecuencias tendremos:

$$\hat{H}(\omega) = H(\omega) * W(\omega)$$

Método de Parks-McClellan

Este método se utiliza para diseñar filtros de Chebyshev o filtros con una amplitud constante del ripple. Intuitivamente podemos ver que si distribuimos la amplitud del ripple de manera uniforme entre todas las frecuencias, podríamos disminuir la amplitud máxima del ripple a expensas de aumentarla donde la amplitud del ripple es más pequeña. Este método propone minimizar la máxima diferencia entre respuestas, un criterio que es denominado minimax o criterio de Chebyshev. La aplicación iterativa de este criterio nos conduce a un filtro en el cual el ripple de su respuesta en frecuencia tiene una amplitud constante.

Filtro de 33 puntos con ripple constante

$$\text{máximo}\left|H(\omega)-\sum_{n=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\hat{h}_n e^{-i\omega n}\right| = mínimo$$

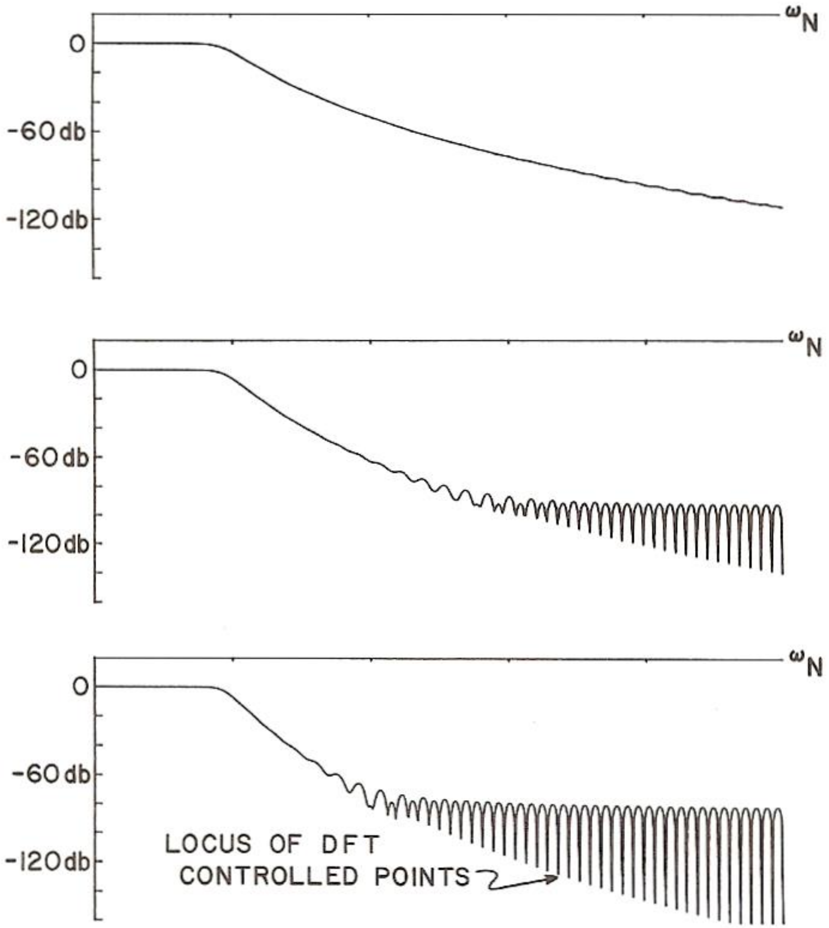
Filtros de Butterworth

El espectro de potencia de un filtro Butterworth está dado por la siguiente expresión:

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^{2\alpha}}$$

Donde ω_C es la frecuencia de corte, donde la potencia del filtro cae a la mitad (-6dB), y α es el orden del filtro. Este espectro de potencia tiene sus primeras $2\alpha-1$ derivadas iguales a cero en $\omega=0$, a esta propiedad se le da el nombre de máximo aplanamiento. El espectro de amplitud es monótonamente decreciente en ω, con una pendiente final en las altas frecuencias de 6α dB/oct. Los filtros de Butterworth de orden bajo tienen una buena representación en tiempo, es decir son filtros cortos. Mientras que los de orden alto tienen una mejor representación en el dominio de las frecuencias pero son más largos en tiempo. Cuanto mayor es el orden del filtro más abrupta es la zona de transición y se requiere de filtros más largos en tiempo. Como la respuesta en frecuencia de estos filtros nunca se anula, es posible diseñar filtros de Butterworth de fase mínima, que se utilizan para filtrar señales de fase mínima de forma tal que la señal filtrada siga siendo de fase mínima.

Filtros de Butterworth



128 puntos

Orden 8

128 puntos

Orden 10

128 puntos

Orden 12

Filtrado en el Dominio de Fourier

La posibilidad de utilizar transformada rápida de Fourier hace que esta manera de filtrar sea particularmente atractiva. Cuando el operador es corto, convolucionar en el dominio del tiempo es más rápido que multiplicar en el dominio de las frecuencias. Sin embargo, cuando el operador es largo, multiplicar en el dominio de las frecuencias utilizando la transformada rápida de Fourier es mucho más rápido que convolucionar en tiempo. La ventaja de utilizar operadores en el dominio del tiempo es la de poder implementar el filtrado como un proceso continuo, mientras que si lo hacemos en el dominio de las frecuencias esto no es posible.

Sabemos que la convolución lineal en tiempo puede ser emulada utilizando la transformada discreta de Fourier agregando ceros en tiempo antes de ir al dominio transformado, para así evitar los efectos de la convolución circular propios de la transformada discreta de Fourier.

Filtrado en el Dominio de Fourier

Para filtrar en el dominio de las frecuencias debe seguir los siguientes pasos:

1. Agregue ceros al final de la señal en tiempo hasta alcanzar una longitud que sea potencia de dos y que además sea como mínimo el doble de la longitud original.

2. Calcule la transformada rápida de Fourier con los ceros agregados en el primer paso.

3. Multiplique la transformada de Fourier de la señal por la respuesta en frecuencia del filtro que desea aplicar.

4. Calcule la transformada rápida de Fourier inversa para regresar al dominio del tiempo con la señal filtrada.

5. Redefina la longitud de la señal filtrada de acuerdo a la longitud original.

Filtrado en el Dominio de Fourier

¿Cual es la verdadera respuesta en frecuencia del filtro aplicado con este procedimiento?

Para encontrar la verdadera respuesta en frecuencia del filtro aplicado debemos hacer lo siguiente:

1. Calcule la transformada discreta inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia que aplicó en el punto 3 del procedimiento anterior, discretizada en las mismas frecuencias para así obtener la respuesta impulsiva en tiempo del filtro que aplicó.

2. Agregue ceros al final de la respuesta impulsiva obtenida hasta quintuplicar su longitud.

3. Calcule la transformada discreta de Fourier de la respuesta impulsiva con los ceros agregados para así obtener la verdadera respuesta en frecuencia aplicada.

Filtrado en el Dominio de Fourier

La diferencia entre la respuesta en frecuencia verdaderamente aplicada y la respuesta en frecuencia deseada, dependerá de la forma de la respuesta en frecuencia deseada. Normalmente la respuesta en frecuencia deseada es tal que su transformada discreta inversa presenta aliasing en tiempo. Esto produce grandes apartamientos de la respuesta en frecuencia verdaderamente aplicada respecto de la respuesta en frecuencia deseada, estos apartamientos se presentarán como ondulaciones, sin embargo en las frecuencias donde se tomaron las muestras originales, las repuestas siempre coinciden.

Si la respuesta en frecuencia deseada no presenta discontinuidades y varía suavemente, su transformada inversa convergerá rápidamente produciendo una cantidad mínima de aliasing y un apartamiento pequeño entre las respuestas en frecuencia.

El filtrado de frecuencias utilizando la transformada rápida de Fourier es particularmente atractivo debido a su velocidad y simplicidad, sin embargo la respuesta en frecuencia verdadera que implícitamente se utiliza en el procedimiento, puede llegar a ser muy diferente a la respuesta en frecuencia deseada, por lo cual es conveniente controlarla.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Eight.
- Oppenheim, Alan V. and Schafer, Roland W. (1975), Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., Chapter Five.