Análisis de Señales en Geofísica

7° Clase

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

La Función Peine

Se define a la función peine $p(t)$ como una serie infinita de deltas de Dirac regularmente espaciadas:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

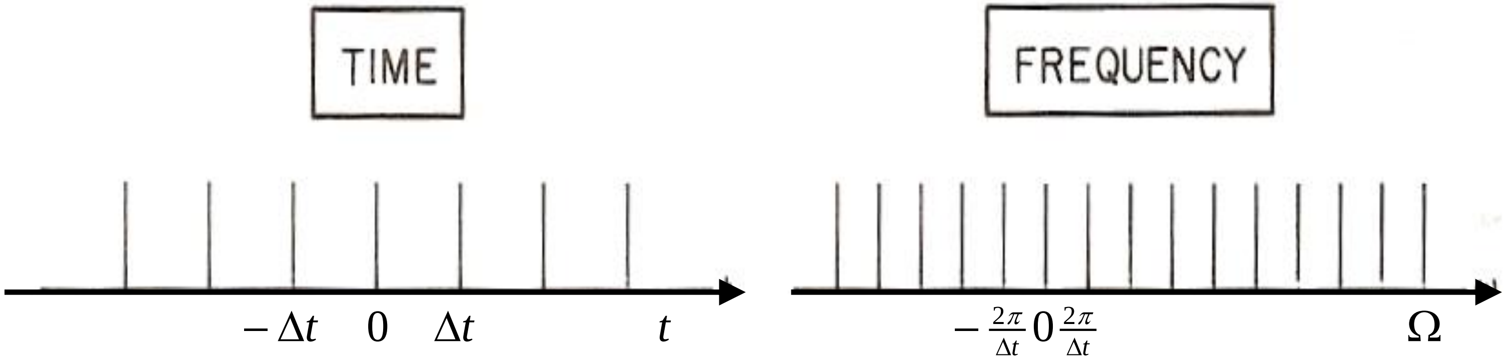
Es una función periódica de período Δt, por lo tanto sus coeficientes de Fourier están dados por:

$$a_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{\frac{-\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} p(t) e^{-i\frac{2\pi}{\Delta t} k \times t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\frac{-\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{\Delta t} k \times t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\frac{-\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) e^{-i\frac{2\pi}{\Delta t} k \times t} dt = \frac{1}{\Delta t}$$

Es decir que la transformada integral de Fourier de la función peine, es otra función peine dada por:

$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t} k\right)$$

La Función Peine



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \qquad P(\Omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t} k\right)$$

La TF de la función peine de período Δt, es otra función peine de período 2π/ Δt y amplitud 2π/ Δt también. La función peine nos permite vincular la transformada integral de Fourier con la transformada discreta de Fourier.

La Función Peine

Aplicando la propiedad de simetría de la transformada de Fourier:

$$\frac{1}{2\pi}F(t) \Leftrightarrow f(-\Omega)$$

Al par transformado:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \Leftrightarrow P(\Omega) = \frac{2\pi}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t}k\right)$$

Obtenemos:

$$q(t) = \frac{1}{\Delta\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{\Delta\Omega}n\right) \Leftrightarrow Q(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Delta\Omega)$$

La Función Peine

La multiplicación de una señal analógica por la función peine nos da una señal discreta con un intervalo de muestreo Δt:

$$x_a(t)\times p(t) = x_a(t)\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(t-n\Delta t) \equiv x_n$$

Multiplicar en el dominio del tiempo es equivalente a convolucionar en el dominio de las frecuencias:

$$X_a(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\nu)P(\Omega-\nu)d\nu = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\nu)\frac{\cancel{2\pi}}{\Delta t}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{\Delta t}k-\nu\right)\right]d\nu$$

$$X_a(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\nu)\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{\Delta t}k-\nu\right)d\nu$$

$$X_a(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega-\frac{2\pi}{\Delta t}k\right) = X(\Omega\Delta t)$$

La Función Peine

Si ahora multiplicamos por la función peine $Q(\Omega)$ para discretizar en frecuencias:

$$x_a(t)\times p(t) * q(t) \Leftrightarrow X_a(\Omega) * P(\Omega)\times Q(\Omega)$$

$$x_a(t)\times p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau)\times p(\tau)\times q(t-\tau)d\tau$$

$$x_a(t)\times p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(\tau - n\Delta t)\right]\times\frac{1}{\Delta\Omega}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi}{\Delta\Omega}m-\tau\right)\right]d\tau$$

$$x_a(t)\times p(t) * q(t) = \frac{1}{\Delta\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau - n\Delta t)\delta\left(t-\frac{2\pi}{\Delta\Omega}m-\tau\right)d\tau$$

$$x_a(t)\times p(t) * q(t) = \frac{1}{\Delta\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi}{\Delta\Omega}m-n\Delta t\right)$$

Es decir que luego de discretizar las frecuencias con un intervalo de muestreo $\Delta\Omega$, la señal en tiempo se repite cada $2\pi/\Delta\Omega$, y aparece un factor de escala.

Este factor $\frac{1}{\Delta\Omega}$ del miembro derecho se cancela con el $\frac{1}{\Delta\Omega}$ de $q(t)$. *La* señal tendrá un periodicidad en tiempo de $\frac{2\pi}{\Delta\Omega} = \mathrm{M}\Delta t$.

TF de una función continua en tiempo y continua en frecuencia:

Aquí el término continuo está usado en el sentido de que la función está definida en un dominio continuo, no en un dominio discreto. El análisis y la síntesis se hacen utilizando la transformada integral de Fourier:

$$\begin{cases} F(\Omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt \\ \\ f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

TF de una función continua y periódica en tiempo, y discreta en frecuencia:

En este caso la señal puede ser desarrollada en series de Fourier. Los coeficientes de Fourier están dados por:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}k\times t} dt$$

El espectro de frecuencias está dado por líneas espectrales de amplitud $2\pi a_k$, ubicadas en múltiplos de la frecuencia fundamental $2\pi/T$:

$$F(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

Al hacer la síntesis obtenemos la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\frac{2\pi}{T}k\times t}$$

TF de una función discreta en tiempo y continua y periódica en frecuencia:

Si expresamos la señal discreta en tiempo de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta\left(t - n\Delta t\right) \equiv f_n$$

Al hacer el análisis obtenemos:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta\left(t - n\Delta t\right) \right] e^{-i\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\Delta t\right) e^{-i\Omega t} dt$$

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\Omega \times n\Delta t}$$

Si nos olvidamos del intervalo de muestreo y ponemos esta expresión en función de la frecuencia angular digital $\omega = \Omega \times \Delta t$, obtenemos la expresión de la respuesta en frecuencia de la señal discreta:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega \times n}$$

TF de una función discreta en tiempo y continua y periódica en frecuencia:

La respuesta en frecuencia de la señal discreta:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega\times n}$$

Es una función continua y periódica, de período 2π. Intercambiando los roles de tiempo y frecuencia podemos desarrollarla en series de Fourier.

Como podemos ver $F(\omega)$ ya está desarrollada en series de Fourier y los valores de la función discreta f_n no son otra cosa que los coeficientes de Fourier, los cuales están dados por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega\times n} d\omega$$

TF de una función discreta y periódica en tiempo, y discreta y periódica en frecuencia:

En este caso lo que utilizamos es la Transformada Discreta de Fourier:

$$\boxed{F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}}$$

Transformada Discreta Directa o análisis

$$\boxed{f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n}}$$

Transformada Discreta Inversa o síntesis

TF de una función discreta y periódica en tiempo, y discreta y periódica en frecuencia:

Veamos como derivar la TDF utilizando la función peine en frecuencia:

$$F(\omega) = \sum_{N=0}^{N-1} f_n e^{-i\omega n}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) e^{i\omega n}$$

Vamos a discretizar la respuesta en frecuencia, sin producir *aliasing* en tiempo:

$$F_d(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} F\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Vimos que al discretizar en frecuencia introducimos un factor de escala de $1/\Delta\omega$ en tiempo:

$$\frac{1}{\Delta\omega} f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_d(\omega) e^{i\omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{N-1} F\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right] e^{i\omega n} d\omega$$

$$f_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} F_k \int_0^{2\pi} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

Fenómeno de Gibbs

Consideremos una función discreta en tiempo, continua y periódica en frecuencia, de período 2π, y con respuesta en frecuencia:

$$F(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{si} \quad |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

La función discreta en tiempo está dada por:

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)e^{i\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\times e^{i\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\omega n}}{in}\Bigg|_{\omega=-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$$

La respuesta en frecuencia se puede calcular a partir de los valores de la función en tiempo:

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n e^{-i\omega n}$$

Sabemos que la síntesis de Fourier en una discontinuidad converge al promedio de los límites por derecha y por izquierda.

Fenómeno de Gibbs

Para evaluar numéricamente la respuesta en frecuencia debemos truncar el desarrollo en serie en algún término. Truncuemos en 2N+1 términos:

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{-i\omega n}$$

La expansión en series de Fourier truncada en 2N+1 términos aproxima en forma óptima a la respuesta en frecuencia ideal en el sentido de los cuadrado mínimos. Es decir, que si planteamos que queremos encontrar los 2N+1 coeficientes $\hat{f}_n$, que minimicen la siguiente función:

$$E(\hat{f}_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|F(\omega) - \hat{F}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left|F(\omega) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{-i\omega n}\right|^2 d\omega = mínimo$$

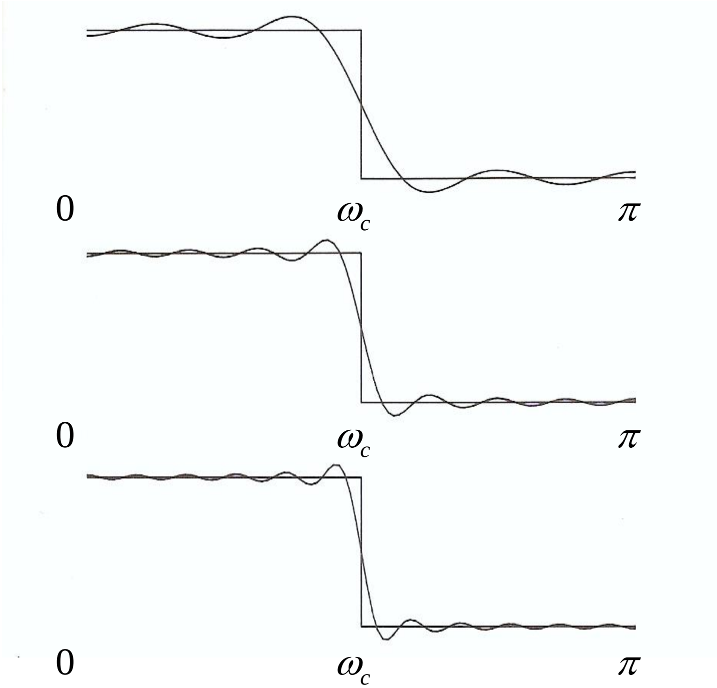
Las siguientes 2N+1 derivadas deberán ser nulas:

$$\frac{\partial E(\hat{f}_n)}{\partial \hat{f}_m} = 0 \quad \forall\, m = -N, N$$

Encontraremos que los coeficientes que son solución de este sistema de ecuaciones son los mismos coeficientes de Fourier:

$$\hat{f}_m = f_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\, e^{-i\omega m} d\omega \quad \forall\, m = -N, N$$

Fenómeno de Gibbs



En los tres ejemplos de la figura podemos ver la respuesta en frecuencia deseada de un filtro pasa-bajos ideal con una discontinuidad en forma de escalón en la frecuencia de corte, y las respuestas en frecuencia del filtro truncado con longitudes 2N+1 cada vez mayores: 13, 29 y 41.

Fenómeno de Gibbs

La máxima separación entre la respuesta en frecuencia del filtro deseado y la respuesta en frecuencia del filtro truncado, se produce cerca de la discontinuidad, mientras que la suma parcial siempre nos da el valor promedio en la discontinuidad. El valor máximo de la diferencia entre las respuestas permanece constante a pesar que agreguemos más y más términos, esta diferencia se aproxima a un valor constante del 8,9% del salto en la discontinuidad a medida que el número de términos de la suma parcial tiende a infinito. Es natural esperar que esta diferencia tienda a cero a medida que aumentamos el número de términos, pero eso no es lo que ocurre.

Este comportamiento inesperado de la convergencia fue observado a finales del siglo XIX y se pensó inicialmente que era un error de cálculo.

Fenómeno de Gibbs

En 1899 el químico, físico y matemático estadounidense Josiah W. Gibbs fue el primero en explicar la verdadera naturaleza de la convergencia por lo cual este fenómeno recibe el nombre de fenómeno de Gibss.

A medida que agregamos términos en la suma parcial, la integral de las diferencias al cuadrado decrece uniformemente, el *ripple* u ondulación del fenómeno de Gibbs oscila más rápidamente y se desplaza hacia la discontinuidad disminuyendo el área entre las dos curvas, pero la amplitud máxima de la ondulación no disminuye. Es decir que no es posible obtener la respuesta ideal deseada con un número finito de coeficientes por muchos que sean.

El problema de cómo obtener la respuesta impulsiva de un filtro, dada su respuesta en frecuencia deseada, es un problema fundamental del diseño de filtros digitales.

Consecuencias de Discretizar una Señal

Ver apunte en la página de la materia:

http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/senales/archivos/Consecuencias_de_Discretizar.pdf

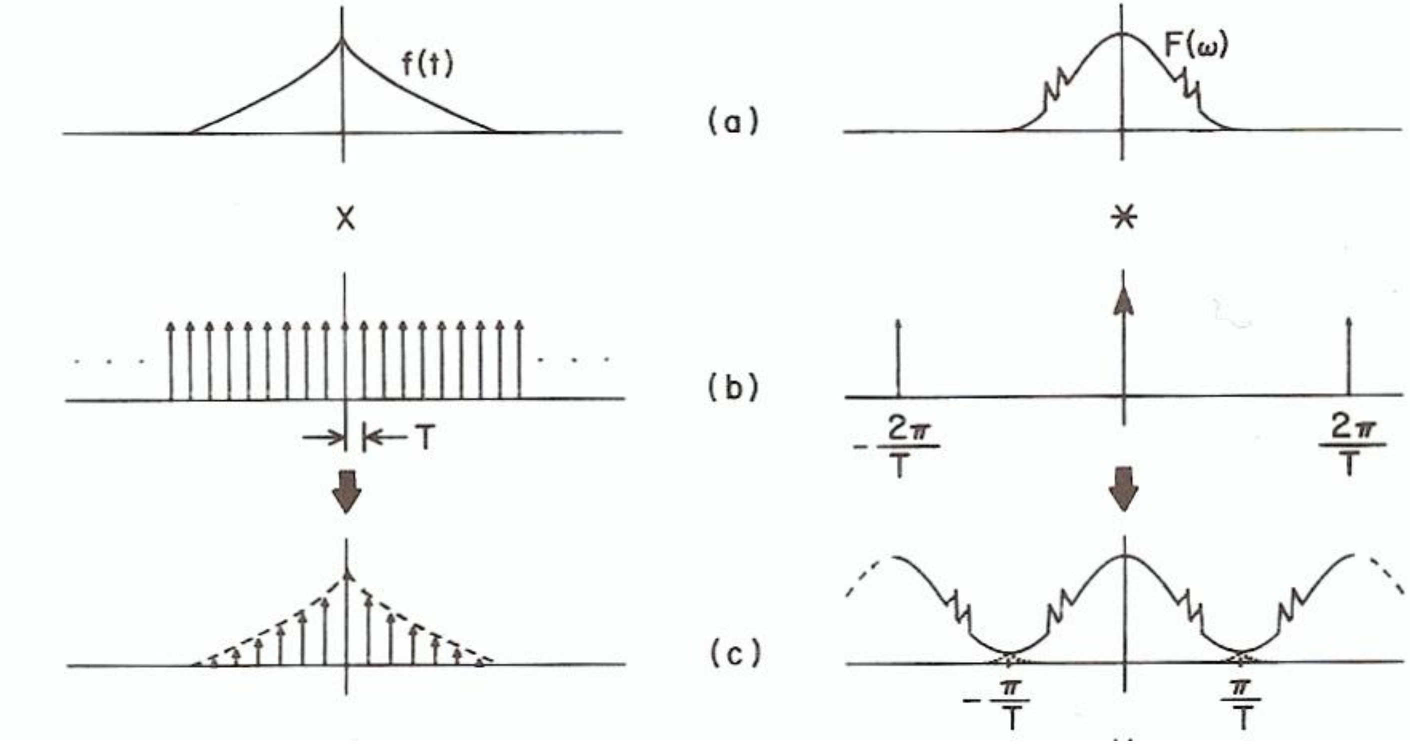


Gráfico tomado del Karl pag.136

Consecuencias de Discretizar una Señal

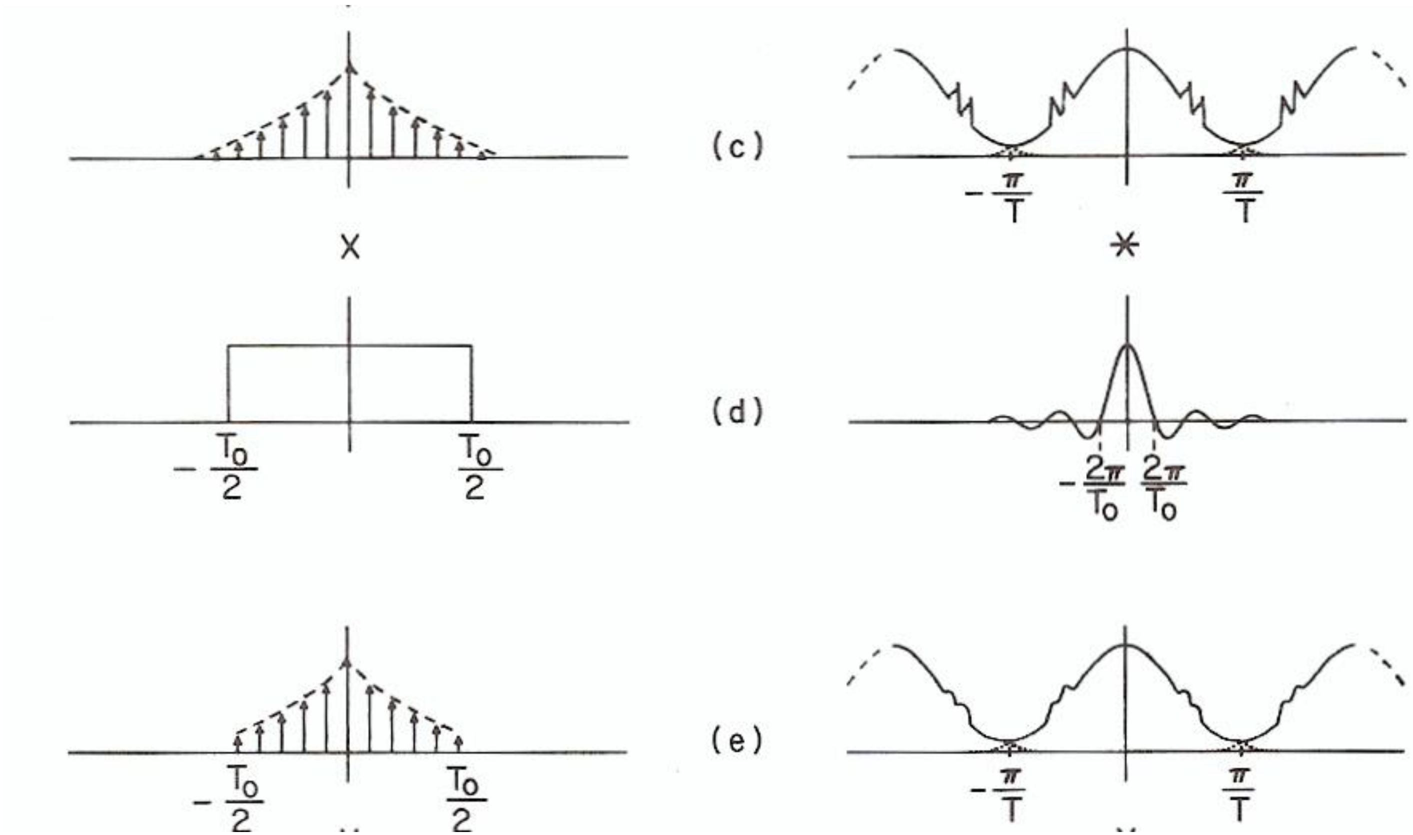


Gráfico tomado del Karl pag.136

Consecuencias de Discretizar una Señal

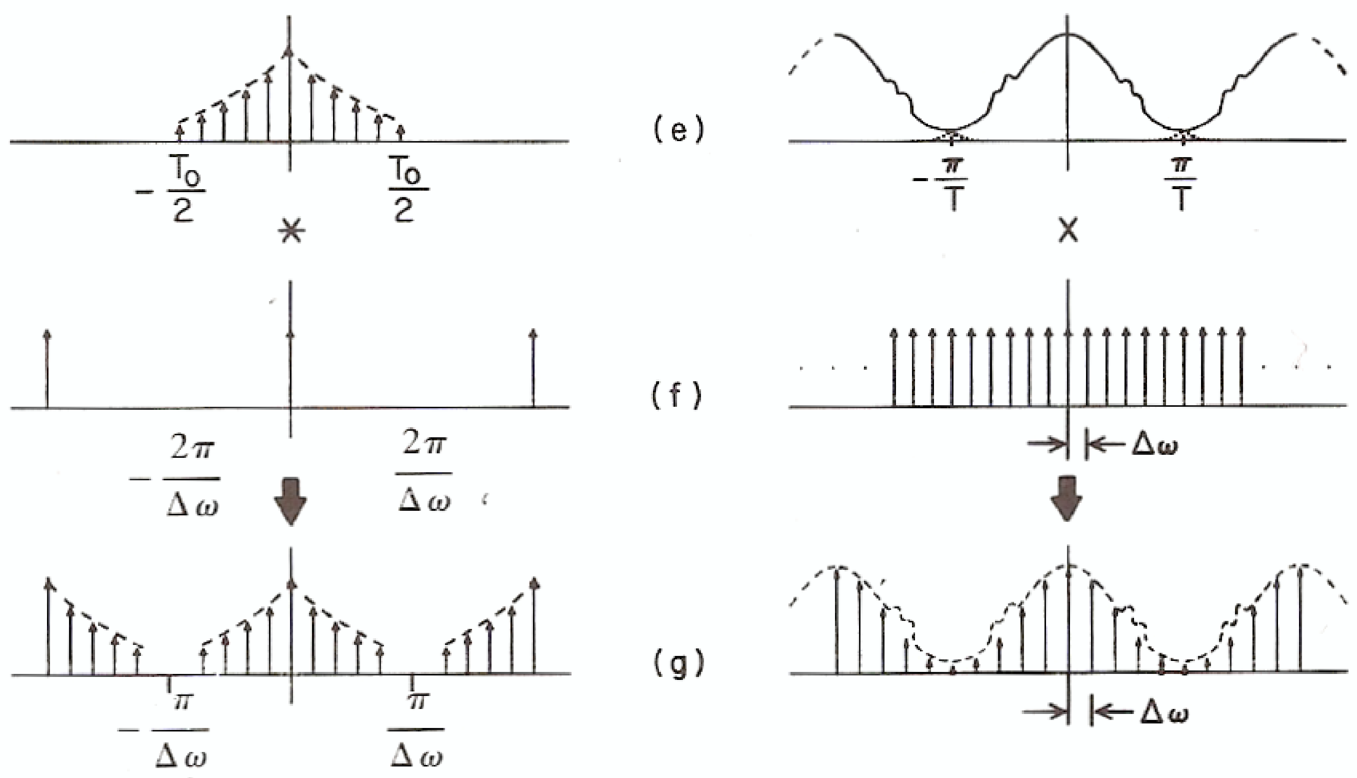


Gráfico tomado del Karl pag.136

Transformada de Fourier de Secuencias Entrelazadas

Dadas dos secuencias de longitud N:

$$a_n = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1})$$
$$b_n = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1})$$

Y sus transformadas de Fourier:

$$A_k = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{N-1})$$
$$B_k = (B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{N-1})$$

Formaremos una nueva secuencia c_n de longitud $2N$, entrelazando las secuencias a_n y b_n del siguiente modo:

$$c_n = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{N-1}, b_{N-1},)$$

Veamos como calcular la transformada discreta de Fourier de la serie entrelazada a partir de las TDF de las dos secuencias originales:

$$A_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times k}$$

$$B_k = \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times k}$$

Transformada de Fourier de Secuencias Entrelazadas

La transformada de Fourier de la secuencia entrelazada está dada por:

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{2\pi}{2N} l\times k} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{2\pi}{2N} l\times k} \qquad k = 0, 2N-1$$

Para obtener C_k a partir de A_k y de B_k necesitamos dos fórmulas diferentes, una para $k = 0, N-1$ y otra para $k = N, 2N-1$.

Obtengamos la primera fórmula válida para $k = 0, N-1$:

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{2\pi}{2N} l\times k} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{\pi}{N} 2j\times k} + \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{\pi}{N} 2\left(j+\frac{1}{2}\right)\times k}$$

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times k} + e^{-i\frac{\pi}{N}k} \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times k}$$

$$\boxed{C_k = A_k + e^{-i\frac{\pi}{N}k} B_k} \qquad k = 0, N-1$$

Transformada de Fourier de Secuencias Entrelazadas

Obtengamos ahora la segunda fórmula válida para $k = N, 2N-1$:

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N} l\times k} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N} l\times (k-N+N)}$$

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N} l\times (k-N)} e^{-i\frac{\pi}{\cancel{N}} l\times \cancel{N}} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N} l\times (k-N)} (-1)^l$$

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{\pi}{N} 2j\times (k-N)} - \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{\pi}{N} 2\left(j+\frac{1}{2}\right)\times (k-N)}$$

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times (k-N)} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N} j\times (k-N)}$$

$$\boxed{C_k = A_{k-N} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} B_{k-N}} \qquad k = N, 2N-1$$

Transformada de Fourier de Secuencias Entrelazadas

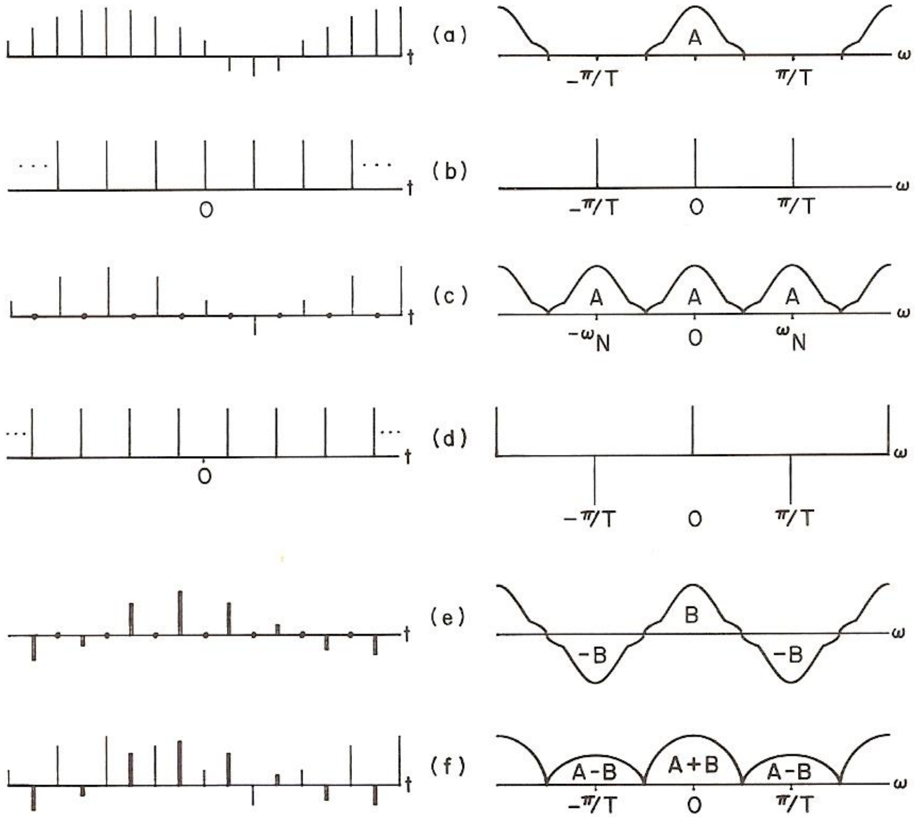


Gráfico tomado del Karl pag.149

Interpolación

Consideremos una señal analógica $x_a(\mathrm{t})$ de banda limitada, con una transformada de Fourier $X_a(\Omega)$ y con una frecuencia máxima $\Omega_{\max}$. Discreticémosla con un intervalo de muestreo Δt_1 tal que:

$$\Omega_{\max} < \frac{\pi}{\Delta t_1} = \Omega_{\mathrm{N}} \qquad \text{ó} \qquad \Delta t_1 < \frac{\pi}{\Omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{2}$$

La transformada de Fourier de la señal discretizada $x_n^{(1)}$ está dada por:

$$x_n^{(1)} \Leftrightarrow X^{(1)}(\Omega\Delta t) = \frac{1}{\Delta t_1} X_a(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{-\pi}{\Delta t_1} < \Omega < \frac{\pi}{\Delta t_1}$$

Discreticemos $x_a(\mathrm{t})$ nuevamente pero ahora con un intervalo de muestreo $\Delta t_2 = \frac{1}{2}\Delta t_1$.

La transformada de Fourier de la señal discretizada $x_n^{(2)}$ está dada por:

$$x_n^{(2)} \Leftrightarrow X^{(2)}(\Omega\Delta t) = \frac{1}{\Delta t_2} X_a(\Omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t_2}\Delta t_1 X^{(1)}(\Omega\Delta t) = 2X^{(1)}(\Omega\Delta t) & \text{si } \dfrac{-\pi}{\Delta t_1} < \Omega < \dfrac{\pi}{\Delta t_1} \\ 0 \quad \text{si} & \dfrac{-\pi}{\Delta t_2} > \Omega > \dfrac{-\pi}{\Delta t_1} \ \wedge \ \dfrac{\pi}{\Delta t_1} < \Omega < \dfrac{\pi}{\Delta t_2} \end{cases}$$

Interpolación

Ahora consideremos que la señal analógica x_a(t) es aproximadamente de banda limitada y de tiempo limitado. Y que tomamos N muestras en tiempo cuando la discretizamos con un intervalo de muestreo Δt_1 y $2N$ muestras cuando la discretizamos con un intevalo de muestreo $\Delta t_2 = \frac{1}{2}\Delta t_1$.

Utilicemos la forma centrada de la transformada de Fourier:

$$x_n^{(1)} \Leftrightarrow X_k^{(1)} = X^{(1)}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \qquad n = 0, N-1 \ \wedge \ k = \frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1$$

$$x_n^{(2)} \Leftrightarrow X_k^{(2)} = X^{(2)}\left(\frac{2\pi}{2N}k\right) \qquad n = 0, 2N-1 \ \wedge \ k = -N, N-1$$

La relación entre espectros está dada por:

$$X_k^{(2)} = 0 \qquad k = -N, \frac{-N}{2}-1$$

$$X_k^{(2)} = 2X_k^{(1)} \qquad k = \frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1$$

$$X_k^{(2)} = 0 \qquad k = \frac{N}{2}, N-1$$

Interpolación

Si utilizamos la forma estándar de la transformada de Fourier, tendremos:

$$x_n^{(1)} \Leftrightarrow X_k^{(1)} = X^{(1)}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \qquad n = 0, N-1 \;\wedge\; k = 0, N-1$$

$$x_n^{(2)} \Leftrightarrow X_k^{(2)} = X^{(2)}\left(\frac{2\pi}{2N}k\right) \qquad n = 0, 2N-1 \;\wedge\; k = 0, 2N-1$$

La relación entre espectros está dada por:

$$X_k^{(2)} = 2X_k^{(1)} \qquad k = 0, \frac{N}{2} - 1$$

$$X_k^{(2)} = 0 \qquad k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + N - 1$$

$$X_k^{(2)} = 2X_{k-N}^{(1)} \qquad k = \frac{N}{2} + N, 2N - 1$$

Es decir que para interpolar una muestra intermedia en tiempo debemos ir al dominio de las frecuencias con la TDF multiplicar el espectro de amplitud por dos y agregar *N* ceros entre réplicas.

Decimación

Para poder decimar una señal desechando una muestra por medio, la señal debe haber sido sobremuestreada, es decir, se tiene que haber utilizado un intervalo de muestreo Δt que cumpla con la condición:

$$\Delta t < \frac{\pi}{2\Omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{4}$$

De esta forma al decimar una muestra por medio, las réplicas se acercan pero no llegan a solaparse. Si esta condición no se cumple, la única forma de evitar el *aliasing* es aplicando un filtro corta-altos o antialias que elimine todas las frecuencias presentes en la señal por encima de la nueva frecuencia de Nyquist.

Antes de digitalizar una señal analógica se aplica un filtro antialias analógico, implementado con componentes electrónicos, que elimine todas la frecuencias mayores a la frecuencia de Nyquist. Aunque la señal no contenga altas frecuencias es posible que existan ruidos de alta frecuencia que convenga eliminar.

Interpolación en Frecuencia

Cuando tenemos una señal discreta de longitud N su transformada discreta de Fourier X_k también es una secuencia de longitud N. Análogamente a lo que hicimos en tiempo, para interpolar una muestra intermedia en frecuencia debemos agregar N ceros entre las réplicas en tiempo. Hacer esto en tiempo es más sencillo porque todo lo que debemos hacer es agregar ceros a la cola de la señal.

Sin embargo, agregar ceros no es estrictamente necesario para interpolar, la ventaja de interpolar agregando ceros es que logramos hacer la interpolación de manera rápida y eficiente utilizando la transformada rápida de Fourier.

Podríamos interpolar el espectro de frecuencias para cualquier frecuencia arbitraria simplemente utilizando la expresión:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega n}$$

O bien podríamos darle valores no enteros al subíndice k en la expresión:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} = X\left(\omega = \tfrac{2\pi}{N}k\right) \qquad k \in \mathbf{R}$$

Interpolación en tiempo

Desde el punto de vista matemático tiempo y frecuencia juegan roles idénticos en la transformada de Fourier, existiendo un paralelismo total entre uno y otro dominio. Para interpolar en tiempo podríamos evaluar la transformada discreta inversa en valores no enteros del subíndice *n* en la expresión:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} = x_a(n\Delta t) \qquad n \in \mathbf{R}$$

Sin embargo surge un problema, si x_n es real, entonces X_k es Hermitiana, y debe cumplirse que:

$$X_k = X^*_{N-k}$$

En la transformada inversa la parte imaginaria correspondiente a frecuencias positivas se cancela con la parte imaginaria correspondiente a la misma frecuencia pero negativa y así x_n nos da valores reales como corresponde. Sin embargo cuando el subíndice *n* toma valores no enteros esta cancelación no se produce y hay que forzarla.

Interpolación en tiempo

Supongamos que tenemos una señal discreta real de longitud par $N=12$. Por ser real su transformada discreta de Fourier deberá ser Hermitiana:

$$X_1 = X^*_{N-1} = X^*_{11}$$
$$X_2 = X^*_{N-2} = X^*_{10}$$
$$X_3 = X^*_{N-3} = X^*_{9}$$
$$X_4 = X^*_{N-4} = X^*_{8}$$
$$X_5 = X^*_{N-5} = X^*_{7}$$

En general tendremos:

$$X_k = X^*_{N-k} \qquad\qquad k = 1, \frac{N}{2} - 1$$

A estos coeficientes debemos agregarles los correspondientes a las frecuencias 0 y π, es decir:

$$X_0 = X(\omega = 0)$$
$$X_{\frac{N}{2}} = X_6 = X(\omega = \pi)$$

Interpolación en tiempo

Teniendo en cuenta que la señal x_n es real y por lo tanto X_k es Hermitiana, la transformada discreta inversa se puede escribir:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} = \frac{1}{N}\left(X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} + \cancel{X_{\frac{N}{2}}}\, e^{i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}\times n} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} \right)$$

Veamos en detalle la última sumatoria del paréntesis. Hagamos el siguiente cambio de variables $k' = N - k$:

$$\sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} = \sum_{k'=1}^{\frac{N}{2}-1} X_{N-k'} e^{i\frac{2\pi}{N}(N-k')\times n} = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_k^* \cancel{e^{i\frac{2\pi}{N}N\times n}}\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

Finalmente obtenemos:

$$x_n = \frac{1}{N}\left[X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} + X_k^* e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \right) \right] \qquad n \in \mathbf{R}$$

Esta expresión puede ser utilizada con valores no enteros del subíndice n y así obtener la señal interpolada.

Interpolación en tiempo

$$x_n = \frac{1}{N}\left[X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} + X_k^* e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}\right)\right]$$

$$x_n = \frac{1}{N}\left[X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(X_k^R + iX_k^I\right)e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} + \left(X_k^R - iX_k^I\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}\right)\right]$$

$$x_n = \frac{1}{N}\left[X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(X_k^R\left(e^{i\frac{2\pi}{N}} \quad\quad X_k^I\left(e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} - e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{x_n = \frac{1}{N}\left[X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[2X_k^R\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - 2X_k^I\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right]\right]}$$

Regularización de Datos

La transformada discreta inversa de Fourier se puede escribir matricialmente del siguiente modo:

$$\mathbf{F}X=x$$

Donde X es un vector columna que contiene a los coeficientes X_k. El vector columna x contiene las muestras x_k de la señal observada. Y la matriz **F** contiene esencialmente exponenciales complejas. **F** es la matriz que vincula linealmente el dominio de Fourier con el dominio de los datos.

Si los datos están regularmente dispuestos, la matriz **F** es una matriz ortogonal, y la operación inversa será la transpuesta conjugada de la operación directa, es decir:

$$X=\mathbf{F}^{H}x$$

Regularización de Datos

Si los datos no fueron regularmente adquiridos se pierde la ortogonalidad y para resolver el problema inverso debemos invertir la matriz **F**:

$$\mathrm{X}=\mathbf{F}^{-1}\mathrm{x}$$

Habitualmente la cantidad de observaciones x_n es mayor que la cantidad de coeficientes que queremos calcular, es decir, tendremos más ecuaciones que incognitas. En ese caso podemos calcular una solución óptima en el sentido de los cuadrados mínimos planteando la siguiente función objetiva a minimizar:

$$\left\|\mathbf{F}\mathrm{X}-\mathrm{x}\right\|_2^2=\text{mínimo}$$

Cuya solución es la conocida inversa generalizada:

$$\mathrm{X}=\mathbf{F}^{\dagger}\mathrm{x}=\left(\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\mathbf{F}\right)^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\mathrm{x}$$

Regularización de Datos

Si la distribución de los datos es mala, la matriz $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\mathbf{F}$, conocida como Hessiano, estará mal condicionada. En ese caso para estabilizar la solución debemos agregar a la función objetiva a minimizar un término de regularización, que maximice alguna propiedad deseada del dato:

$$\left\|\mathbf{F}\mathrm{X}-\mathrm{x}\right\|_2^2+\mu^2\left\|R\left(\mathrm{X}\right)\right\|_2^2=\text{mínimo}$$

Si el término de regularización es la norma dos de la solución al cuadrado, es decir $\left\|\mathrm{X}\right\|_2^2$, se habla de regularización de Tikhonov.

Este problema inverso se resuelve habitualmente utilizando métodos iterativos, como por ejemplo el método del gradiente conjugado por cuadrados mínimos. Una vez obtenidos los coeficientes de Fourier, podemos utilizar la transformada inversa para interpolar datos regulares. La generalización de este método de regularización a n-dimensiones es conceptualmente simple pero compleja de programar.

Representación de Polinomios

Representación por Coeficientes:

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_{N-1} z^{N-1}$$

$$x_n = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$$

Representación por Valores:

$$\{(z_1, X(z_1)), (z_2, X(z_2)), (z_3, X(z_3)), \cdots, (z_N, X_N)\}$$

Dados N puntos diferentes, existe un y sólo un polinomio de grado N-1 que pasa por todos ellos.

Matriz de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} X(z_1) \\ X(z_2) \\ X(z_3) \\ \vdots \\ X(z_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{N-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \cdots & z_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

La matriz de esta ecuación matricial es conocida como matriz de Vandermonde. Si los N puntos z_n, son diferentes entonces el determinante de esta matriz es distinto de cero. Lo cual nos permite garantizar que existe un y sólo un polinomio X(z) de grado N-1 que pasa por estos puntos.

Multiplicación de Polinomios:

Dadas las representaciones por coeficientes de dos polinomios A(z) y B(z), ambos de grado N-1, la multiplicación de los mismos requiere de O(N^2) operaciones:

$$C(z)=A(z)B(z)$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k} \qquad n=0,\ldots,2N-1$$

Multiplicación de Polinomios:

Dadas las representaciones por valores de dos polinomios A(z) y B(z), ambos de grado N-1, la multiplicación de los mismos requiere de O(2N) operaciones:

$$C(z)=A(z)B(z)$$

$$\{(z_1,C(z_1)=A(z_1)B(z_1)),(z_2,C(z_2)=A(z_2)B(z_2)),\ldots,(z_{2N-1},C(z_{2N-1})=A(z_{2N-1})B(z_{2N-1}))\}$$

$$\{(z_1,C(z_1)),(z_2,C(z_2)),\ldots,(z_{2N-1},C(z_{2N-1}))\}$$

Necesitamos valores de los polinomios A(z) y B(z) en 2N-1 puntos, debido a que el polinomio C(z) es de grado 2N-2.

Transformada Rápida de Fourier:

La multiplicación de dos polinomios de grado N-1, representados por valores, requiere de un número mucho menor de operaciones O(2N) que la multiplicación de polinomios representados por coeficientes, la cual requiere de O(N^2) operaciones.

La manera habitual de representar polinomios es por coeficientes. Para evaluar los polinomios en 2N-1 puntos, necesitamos de O((2N)^2) operaciones. Para obtener los coeficientes a partir de los valores, necesitamos invertir la matriz de Vandermonde y luego realizar O((2N)^2) operaciones.

Para multiplicar eficientemente polinomios representados por valores, necesitamos una manera muy eficiente de pasar de la representación por valores a la representación por coeficientes y viceversa. Estas operaciones son conocidas como evaluación e interpolación.

Transformada Rápida de Fourier:

En 1805 Gauss desarrolló un algoritmo para determinar las órbitas de asteroides a partir de ubicaciones conocidas. Este algoritmo hoy es conocido como transformada rápida de Fourier o por su acrónimo en inglés FFT (*Fast Fourier Transform*). Fue desarrollado por Gauss antes de que Fourier publicara sus resultados en 1822, y es precisamente el algoritmo que nos permite pasar de manera increíblemente eficiente de la representación de polinomios por coeficientes, a la representación por valores, y viceversa.

Tomaron 160 años para que en 1965 Cooley y Tukey, reinventaran la FFT motivados por la necesidad de los EEUU de procesar, de manera sumamente rápida, señales sismológicas que permitieran detectar en tiempo real las pruebas nucleares realizadas por la Unión Soviética. La FFT es, sin exageración, uno de los algoritmos más importantes jamás creados, con incontables aplicaciones en el amplio campo del procesamiento de señales digitales.

Separación en términos pares e impares:

Consideremos un polinomio P(z) de grado N-1, donde N es un número par:

$$P(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+p_4z^4+p_5z^5+\cdots+p_{N-2}z^{N-2}+p_{N-1}z^{N-1}$$

$$P_p(z^2)=p_0+p_2(z^2)+p_4(z^2)^2+\cdots+p_{N-2}(z^2)^{N/2-1}$$

$$z\cdot P_i(z^2)=z\cdot[p_1+p_3(z^2)+p_5(z^2)^2+\cdots+p_{N-1}(z^2)^{N/2-1}]$$

$$P(z)=P_p(z^2)+z\cdot P_i(z^2)$$

De esta manera, redujimos el polinomio de grado N-1 en z, a la suma de dos polinomios de grado N/2-1 en z^2.

Simplificamos la evaluación:

En vez de evaluar el polinomio de grado N-1 en N puntos, podemos evaluar los polinomios de coeficientes pares e impares, en N/2 puntos z_i, i=1,...,N/2. Y luego obtener las N evaluaciones del polinomio original, en los pares de puntos positivos y negativos, utilizando las siguientes expresiones:

$$P(z)=P_p(z^2)+z \cdot P_i(z^2)$$

$$P(z_i)=P_p(z_i^2)+z_i \cdot P_i(z_i^2) \qquad i=1,\ldots,N/2$$

$$P(-z_i)=P_p(z_i^2)-z_i \cdot P_i(z_i^2) \qquad i=1,\ldots,N/2$$

Podemos repetir iterativamente esta reducción de grado de los sucesivos polinomios, hasta obtener N polinomios de grado cero, siempre que N sea potencia de 2. Pero debemos expandir la evaluación a valores complejos.

¿Cuál es la manera de elegir los puntos de evaluación?

Para responder esta pregunta, planteemos el problema para un caso concreto simple. Consideremos que tenemos un polinomio de 3er. grado, el cual requiere ser evaluado en 4 puntos que puedan agruparse de a pares positivo y negativo. Llamemos a estos puntos z_1, z_2, z_3 y z_4. Podemos elegir el primer punto z_1 de manera arbitraria. Elijamos $z_1=1$. Esto implica que $z_3=-z_1=-1$. Sabemos que la recursión requiere evaluar los polinomios de grado par e impar en 2 puntos z_1^2 y z_2^2, y que para que la recursión funcione, estos dos puntos también deben ser pares positivo y negativo, es decir z_1^2=-z_2^2. También deberá cumplirse que z_1^4=1=z_2^4=z_3^4=z_4^4=1. Esto puede ser pensado como que, los puntos de evaluación deben ser las raíces cuartas de la unidad:

$$\sqrt[4]{1} = e^{i\frac{2\pi}{4}k} \qquad k=0,\ldots,3$$

¿Cuál es la manera de elegir los puntos de evaluación?

Esquemáticamente podemos indicar lo expresado del siguiente modo:

$$z_1 = 1 \qquad z_3 = -z_1 = -1 \qquad z_2 = i \qquad z_4 = -z_2 = -i$$

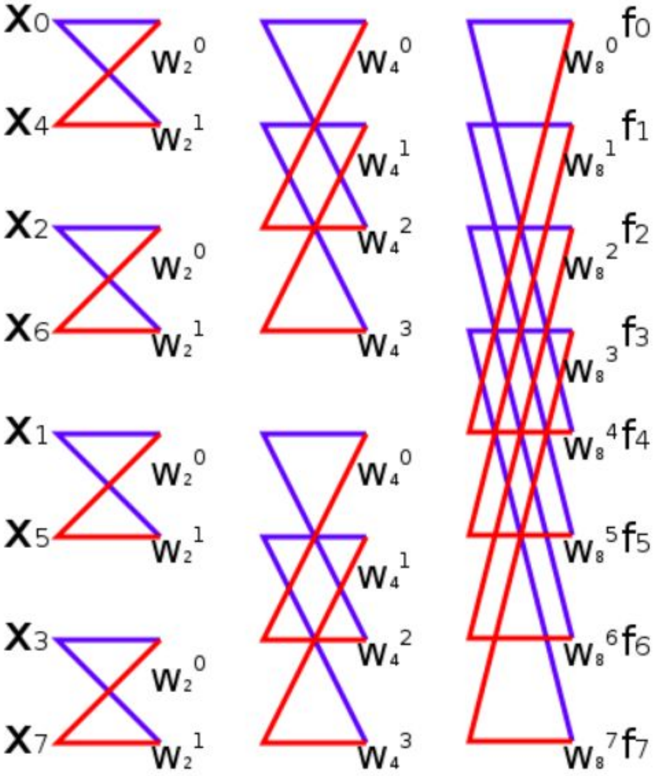
$$z_1^2 = z_3^2 = 1 \qquad\qquad z_2^2 = z_4^2 = -1$$

$$z_1^4 = 1$$

Generalizando, para un polinomio de grado N-1, los N puntos de evaluación estarán dados por:

$$\sqrt[N]{1} = z_k = e^{i\frac{2\pi}{N}(k-1)} \qquad k = 1, \ldots, N$$

Mariposa de Fourier:



Donde:

$$f_k = FFT\{X_n\}$$

$$W_N^k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k}$$

$$N=8$$

Matriz de Fourier:

La matriz de Vandermonde V, para los N puntos de evaluación seleccionados, es conocida como matriz de Fourier W_N:

$$V_{kn} = W_{kn} = W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

La matriz de Fourier es una matriz ortogonal cuya inversa es igual a la hermitiana o transpuesta conjugada dividida por N:

$$(W_{kn})^{-1} = \frac{1}{N} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

FFT Inversa:

La transformada rápida de Fourier inversa puede calcularse con el mismo algoritmo que se utiliza para calcular la transformada rápida de Fourier directa. Las únicas modificaciones que debemos hacerle es cambiar el signo a la exponencial compleja y dividir el resultado final por N.

Debemos tener presente que para aplicar el algoritmo aquí presentado, N debe ser potencia de 2. En caso que esta condición no se cumpla, debemos agregar coeficientes nulos hasta alcanzar la potencia de 2 más próxima. El costo computacional adicional por agregar ceros es despreciable.

Una aclaración importante, existen implementaciones de la transformada rápida de Fourier para valores arbitrarios de N, es decir, valores que no sean potencia de 2. Pero la complejidad de estos algoritmos es muy superior y las diferencias en los tiempos de procesamiento no son significativos. Además, existen algoritmos para el cálculo de las transformadas rápidas seno y coseno.

A continuación se incluyen los códigos de las transformadas rápidas de Fourier, directa e inversa en Julia. Estos códigos no controlan que N sea potencia de 2.

Transformada Rápida de Fourier Directa - Código en Julia:

```
function trf(x) # x=[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7]
N=length(x) # N debe ser potencia de 2
if N==1
        return x
end
W=exp(-im*2π/N)
xe=x[1:2:N-1]
xo=x[2:2:N]
Xe=trf(xe)
Xo=trf(xo)
Nh=Int(N/2)
X=Complex.(zeros(N))
for n=1:Nh
        X[n] = Xe[n] + W^(n-1) * Xo[n]
        X[n+Nh] = Xe[n] - W^(n-1) * Xo[n]
end
return X
end
```

Transformada Rápida de Fourier Inversa - Código en Julia:

```
function trfi(X) # X=[X0,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7]
N=length(X) # N debe ser potencia de 2
if N==1
	return X
end
W=exp(im*2π/N)
Xe=X[1:2:N-1]
Xo=X[2:2:N]
xe=trfi(Xe)
xo=trfi(Xo)
Nh=Int(N/2)
x=Complex.(zeros(N))
for n=1:Nh
	x[n] = xe[n] + W^(n-1) * xo[n]
	x[n+Nh] = xe[n] - W^(n-1) * xo[n]
end
return x/2.
end
```

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Seven.
- Claerbout, Jon F. (1992), Earth Sounding Analysis, Processing versus Inversion, Blackwell Scientific Publications.
- Sacchi, M.D., and T.J. Ulrych, 1996, Estimation of the discrete Fourier Transform – A linear inversion approach: Geophysics, 61, 1128-1136
- Liu, B., and M.D. Sacchi, 2004, Minimum weighted norm interpolation of seismic records, Geophysics, 69, 1560-1568.