Análisis de Señales en Geofísica

6° Clase

Discretización de una Señal Analógica

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Transformada Integral de Fourier

Recordemos que una función $f(t)$, definida en un dominio continuo $(-\infty, +\infty)$, se puede representar como una combinación lineal de exponenciales complejas:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$ Síntesis o Transformada Inversa

Donde el espectro de frecuencia $F(\Omega)$ está dado por la siguiente expresión:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt$$ Análisis o Transformada Directa

Indicaremos de la siguiente manera que $F(\Omega)$ es la transformada integral de Fourier de la función $f(t)$:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\Omega)$$

Muestreo de una Señal Analógica

Consideremos una señal analógica $x_a(t)$ cuya transformada integral de Fourier está dada por:

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-i\Omega t} dt$$

Su transformada inversa de Fourier es:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$

La señal discretizada x_n se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_n = x_a(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{i\Omega n\Delta t} d\Omega$$

Por conveniencia expresamos esta integral como una sumatoria de integrales:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\frac{\pi}{\Delta t}}^{(2r+1)\frac{\pi}{\Delta t}} X_a(\Omega) e^{i\Omega n\Delta t} d\Omega$$

Muestreo de una Señal Analógica

Hacemos el siguiente cambio de variables $\Omega = \Omega' - \frac{2\pi}{\Delta t} r$:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\frac{\pi}{\Delta t}}^{(2r+1)\frac{\pi}{\Delta t}} X_a(\Omega) e^{i\Omega n \Delta t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} X_a\left(\Omega' + \frac{2\pi}{\Delta t} r\right) e^{i\Omega' n \Delta t} \cancel{e^{i 2\pi r n}} d\Omega'$$

Simplificando la exponencial compleja e intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral, obtenemos:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi}{\Delta t} r\right) \right] e^{i\Omega n \Delta t} d\Omega$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variables $\Omega = \frac{\omega}{\Delta t}$, y obtenemos:

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t} + \frac{2\pi}{\Delta t} r\right) \right] e^{i\omega n} d\omega}$$

Dejemos por un momento esta ecuación.

Series de Fourier

Recordemos que una función $f(t)$ que está definida en un dominio continuo, y que además es periódica, de período T, se la puede desarrollar en series de Fourier de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

Donde los coeficientes de Fourier a_n están dados por:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Series de Fourier

Una función periódica, de período T, tendrá un espectro de frecuencias o transformada integral de Fourier dado por líneas espectrales de amplitud $2\pi a_k$, ubicadas en múltiplos de la frecuencia fundamental: $\Omega_k = \Omega_0 k = \frac{2\pi}{T} k$, es decir:

$$F(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \Omega_0 k)$$

La síntesis de la señal en tiempo está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \Omega_0 k) e^{i\Omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 k) e^{i\Omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\Omega_0 k t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{T} n t}$$

Muestreo de una Señal Analógica

La respuesta en frecuencia o transformada de Fourier de una señal discreta está dada por:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n}$$

Teniendo en cuenta que $X(\omega)$ es una función continua y periódica de la frecuencia, podemos intercambiar los roles de tiempo y frecuencia, y utilizar series de Fourier para escribir:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

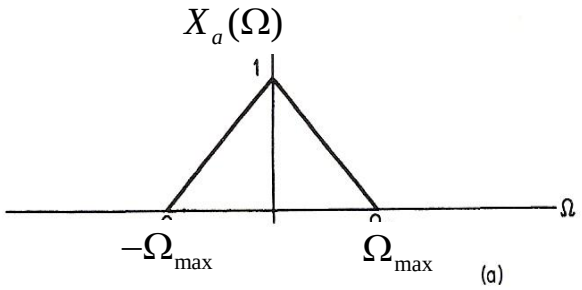
Ahora comparando con la expresión que obtuvimos anteriormente:

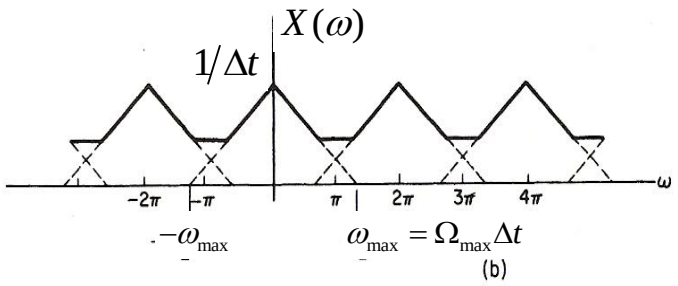
$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t} + \frac{2\pi}{\Delta t} r \right) \right] e^{i\omega n} d\omega$$

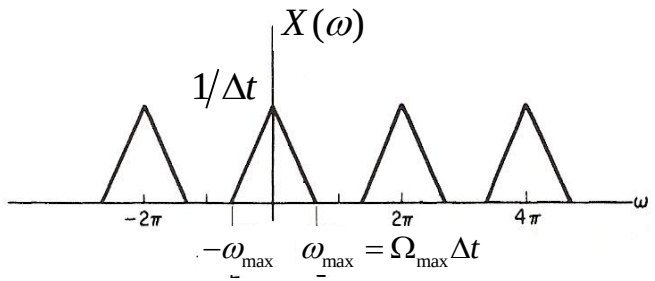
Podemos ver que la relación entre la transformada de Fourier de la señal discretizada y la transformada de Fourier de la señal analógica es:

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t} + \frac{2\pi}{\Delta t} r \right)}$$

Muestreo de una Señal Analógica







$$X(\omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t} - \frac{2\pi}{\Delta t}r\right)$$

Aliasing en Frecuencia
Teorema del Muestreo

Podemos ver que si el intervalo de muestreo Δt es muy grande las repeticiones del espectro de frecuencia se solaparán, en ese caso las frecuencias más altas del espectro se mezclarán con las más bajas. Este fenómeno en el cual las frecuencias más altas toman la identidad de las más bajas es conocido como *aliasing*. Es claro que si la frecuencia máxima Ω_{max} presente en la señal es menor que la mitad de la frecuencia de muestreo no se producirá solapamiento entre repeticiones. Como ya hemos visto a la mitad de la frecuencia de muestreo se la llama frecuencia de Nyquist:

$$\Omega_N = \tfrac{1}{2}\Omega_S = \frac{\pi}{\Delta t}$$

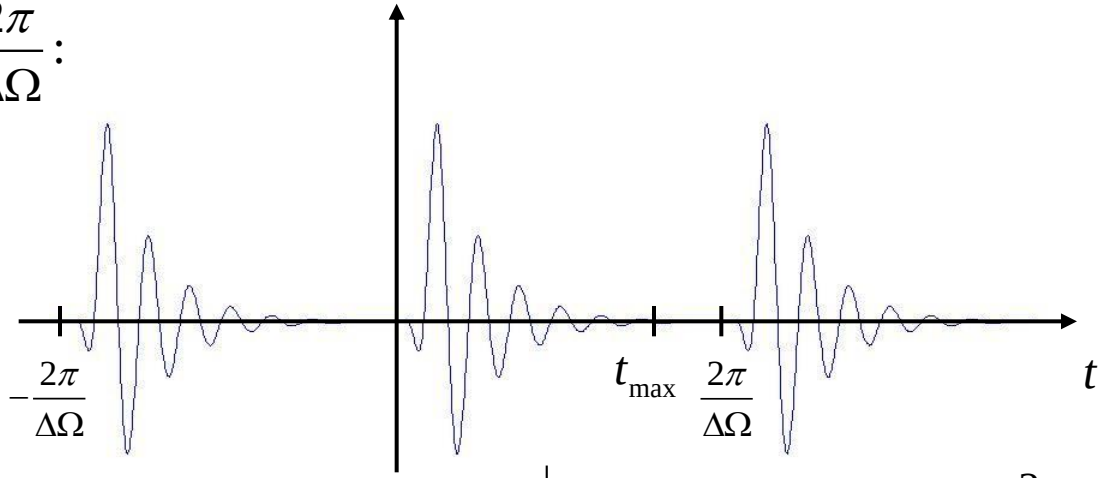
La condición para evitar aliasing es:

$$\boxed{\Omega_{max} < \Omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}}$$

Esto es conocido como Teorema del Muestreo.

Aliasing en Tiempo

Análogamente cuando discretizamos en frecuencia producimos periodicidad en tiempo de período $\frac{2\pi}{\Delta\Omega}$:



Para que no se produzca aliasing en tiempo se debe cumplir que:

$$t_{\max} < 2\pi/\Delta\Omega$$

$$t_{\max} = (N-1)\Delta t < M\Delta t$$

$$(N-1) < M$$

$$\boxed{N \le M}$$

Veamos a qué es igual $\frac{2\pi}{\Delta\Omega}$:

$$\omega = \Omega \times \Delta t$$

$$\Delta\omega = \Delta\Omega \times \Delta t$$

$$\frac{2\pi}{M} = \Delta\Omega \times \Delta t$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{\Delta\Omega} = M \times \Delta t}$$

Interpolación Seno Cardinal

Si cumplimos con la condición del teorema de Nyquist, podemos recuperar la señal analógica a partir de la señal discreta. Veamos como hacerlo:

$$X(\omega = \Omega\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} X_a(\Omega) \qquad \text{si } \frac{-\pi}{\Delta t} \le \Omega \le \frac{\pi}{\Delta t}$$

Utilizando la transformada integral de Fourier, teniendo en cuenta que la señal es de banda limitada, y que cumple con Nyquist, podemos escribir:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} X_a(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \Delta t \times X(\Omega\Delta t) e^{i\Omega t} d\Omega$$

Como:
$$X(\Omega\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n\Delta t) e^{-i\Omega\Delta t n}$$

Entonces:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \Delta t \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n\Delta t) e^{-i\Omega\Delta t n} \right] e^{i\Omega t} d\Omega$$

Interpolación Seno Cardinal

Intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral, obtenemos:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \Delta t \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n\Delta t)e^{-i\Omega\Delta t n}\right] e^{i\Omega t} d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left[\frac{\Delta t}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} e^{i\Omega(t-n\Delta t)} d\Omega\right]$$

Resolviendo la integral:

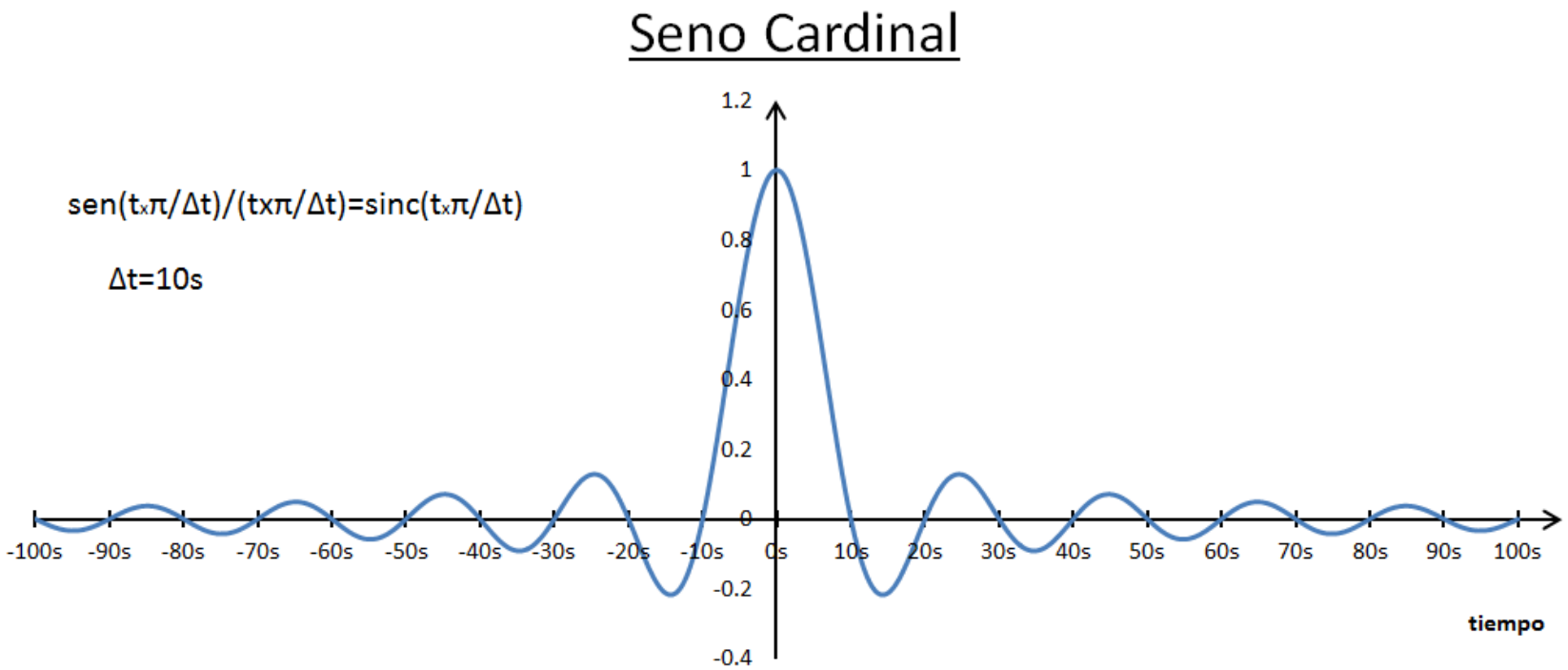
$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left[\frac{\Delta t}{2\pi}\frac{e^{i\Omega(t-n\Delta t)}}{i(t-n\Delta t)}\right]_{\Omega=\frac{-\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{e^{i\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)} - e^{-i\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)}}{2i\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)}$$

$$\boxed{x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\right]}{\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)}}$$

Esta expresión nos permite recuperar la señal analógica de banda limitada a partir de las muestras tomadas con un intervalo de muestreo $\Delta t < \pi/\Omega_{\max}$ y es conocida como interpolación seno cardinal (*Sinc interpolation*).

Interpolación Seno Cardinal

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{sin\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)\right]}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)} = x_n * \frac{sin\left(\frac{\pi}{\Delta t}t\right)}{\frac{\pi}{\Delta t}t} = x_n * sinc\left(\frac{\pi}{\Delta t}t\right)$$



Transformada de Fourier de la Función Cajón

Definimos a la función cajón como:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{si} \quad -T > t > T \end{cases}$$

El cálculo de su transformada de Fourier es inmediato:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt = \int_{-T}^{T} e^{-i\Omega t} dt = \frac{e^{-i\Omega t}}{-i\Omega}\Bigg|_{t=-T}^{T} = \frac{e^{i\Omega T} - e^{-i\Omega T}}{i\Omega} = 2T \frac{e^{i\Omega T} - e^{-i\Omega T}}{i2 \times \Omega T}$$

$$\boxed{F(\Omega) = 2T \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega T}}$$

Transformada de Fourier de la Función Cajón

La longitud de la función cajón en tiempo es $\Delta\tau = 2T$. Definimos al ancho de banda del seno cardinal como la distancia entre sus dos primeros cruces por cero $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

El producto de las longitudes en uno y otro dominio será constante:

$$\Delta\tau \times \Delta\Omega = 2T\,\frac{2\pi}{T} = 4\pi$$

Por lo tanto, una función cajón larga en tiempo tendrá una respuesta angosta en frecuencia y viceversa. En el límite cuando la longitud de la función cajón en tiempo tienda a infinito el seno cardinal en frecuencia tenderá a una delta de Dirac.

Transformada de Fourier de la Función Cajón

Utilizando la propiedad de simetría de la transformada de Fourier:

$$\text{si} \quad f(t) \Leftrightarrow F(\Omega) \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{2\pi} F(t) \Leftrightarrow f(-\Omega)$$

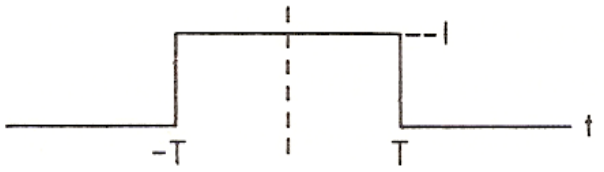
Podemos demostrar que la transformada de Fourier de una función seno cardinal es una función cajón:

$$\mathrm{F}(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\Omega_0 < \Omega < \Omega_0 \\ 0 & \text{si} \quad -\Omega_0 > \Omega > \Omega_0 \end{cases}$$

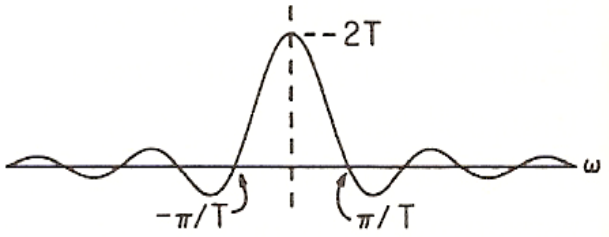
El cálculo de la transformada inversa de Fourier es inmediato:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} 2\Omega_0 \frac{\sin(\Omega_0 t)}{\Omega_0 t} = \frac{\Omega_0}{\pi} \frac{\sin(\Omega_0 t)}{\Omega_0 t}$$

Transformada de Fourier de la Función Cajón

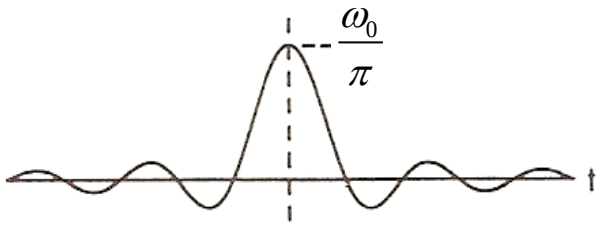


$$f(t)=\begin{cases}1 & -T<t<T\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



$$F(\omega)=2T\sin(\omega T)/(\omega T)$$

(a)



$$f(t)=\frac{\omega_o}{\pi}\sin(\omega_o t)/(\omega_o t)$$

(b)

$$F(\omega)=\begin{cases}1 & -\omega_o<\omega<\omega_o\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

Resolución en Frecuencias

Cuando observamos una señal que se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$ lo hacemos desde un instante inicial hasta un instante final, es decir que al observar la señal la estamos multiplicando en tiempo por una función cajón, lo cual es equivalente a convolucionar su espectro de frecuencia por una función seno cardinal. El efecto de esta convolución es el de distorsionar el espectro de frecuencias suavizándolo, por lo tanto estamos perdiendo resolución en el espectro de frecuencia. Esta pérdida de resolución debida a la longitud finita de los datos observados es inevitable y solo podemos mejorar la resolución observando la señal durante un tiempo más prolongado. Si la función cajón es muy larga la función seno cardinal será muy angosta, en el límite para una longitud de observación que tienda a infinito el seno cardinal tenderá a una delta de Dirac. Por el contrario si el tiempo de observación es muy corto, la función cajón será muy corta y el seno cardinal será muy ancho, lo que provocará una pérdida severa de resolución en frecuencia.

Otra forma de ver la interpolación seno cardinal:

Vimos que la relación entre la transformada de Fourier de una señal analógica y la transformada de Fourier de la misma señal pero discretizada está dada por:

$$X(\Omega\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega + \Omega_S r)$$

Si multiplicamos a esta expresión por Δt y por la siguiente función cajón:

$$F(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \Omega < \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0 & \text{si} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} > \Omega > \frac{\pi}{\Delta t} \end{cases} \qquad \text{TF}^{-1}\{F(\Omega)\} = f(t) = \frac{1}{\Delta t}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta t}t\right)}{\frac{\pi}{\Delta t}t}$$

Obtenemos una expresión para recuperar la transformada de Fourier de la señal analógica a partir de la transformada de Fourier de la señal discretizada, siempre que hayamos cumplido con el criterio de Nyquist:

$$X_a(\Omega) = \Delta t \times F(\Omega) \times X(\Omega\Delta t)$$

Otra forma de ver la interpolación seno cardinal:

La operación equivalente en el dominio del tiempo será:

$$x_a(t) = \Delta t \times f(t) * x_n \quad \Leftrightarrow \quad X_a(\Omega) = \Delta t \times F(\Omega) \times X(\Omega \Delta t)$$

Esta es otra forma de llegar a la fórmula de interpolación seno cardinal:

$$x_a(t) = \Delta t \times f(t) * x_n = \Delta t \times \frac{1}{\Delta t} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta t} t\right)}{\frac{\pi}{\Delta t} t} * x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)\right]}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)}$$

Esta expresión puede interpretarse como una sumatoria de senos cardinales escalados y retardados.

¿Tiempo Limitado-Banda Limitada?

En la práctica siempre que apliquemos la transformada discreta de Fourier, la señal tendrá que ser de banda limitada en frecuencia, para poder discretizarla en tiempo, y de longitud limitada en tiempo, para poder discretizarla en frecuencia y así implementar la transformada discreta de Fourier con un número finito de términos.

Sin embargo, el ***teorema de tiempo limitado-banda limitada*** nos dice que ninguna señal puede ser simultáneamente de tiempo limitado y de banda limitada, excepto el caso trivial cuando la señal es constante e igual a cero.

En la práctica veremos que las señales pueden tender asintóticamente a cero hasta alcanzar valores tan pequeños que están por debajo del valor más pequeño que podemos observar y podremos por lo tanto, a los fines prácticos, considerarlas nulas. El ejemplo típico es el seno cardinal el cual está definido con valores distintos a cero entre menos infinito e infinito, sin embargo a partir de cierto tiempo el valor de la función será tan pequeño que podremos considerarlo nulo.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Six.
- Oppenheim, Alan V. and Schafer, Roland W. (1975), Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc.