Análisis de Señales en Geofísica

5° Clase

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Discretización de la Respuesta en Frecuencia

Hemos visto que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, de un sistema SLI con respuesta impulsiva h_n, es una función continua y periódica de la frecuencia digital ω:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\omega n}$$

Tomemos M muestras de $H(\omega)$ a intervalos regulares de la frecuencia entre 0 y 2π:

$$H(\omega_k) = H(\tfrac{2\pi}{M} k) = H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{M} k \times n} \qquad k = 0, M-1$$

Como $H(\omega)$ es una función periódica de período 2π, H_k va a resultar una función discreta, periódica, de período M.

Esta ecuación:

$$\boxed{H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{M} k \times n}} \qquad k = 0, M-1$$

representa una transformación de N números h_n en M números H_k.

Discretización de H(ω)

Con la idea de obtener una transformación inversa simple, vamos a limitar la cantidad de puntos en frecuencia a la misma cantidad de puntos en tiempo:

$$\boxed{H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}} \qquad\qquad k = 0, N-1$$

Aunque esta restricción no es estrictamente necesaria, al hacerlo nos quedan N ecuaciones con N incógnitas.

Multipliquemos ambos miembros por $e^{i\frac{2\pi}{N}k\times m}$, sumemos sobre k, e intercambiemos el orden de las sumatorias:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times m} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} e^{i\frac{2\pi}{N}k\times m} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(m-n)}$$

Introduzcamos la relación de ortogonalidad de la Transformada Discreta de Fourier.

Relación de Ortogonalidad de la Transformada Discreta de Fourier

Esta relación está dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = N\delta_{n,m}}$$

Donde $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker:

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

La relación de ortogonalidad es simple de verificar si pensamos a la sumatoria como una suma vectorial en el plano complejo de N vectores de módulo unitario regularmente orientados en todas las direcciones. Para los casos en que $n \neq m$, los vectores concatenados formarán un polígono cerrado, por lo tanto la resultante será cero. Si $n = m$, formarán una línea recta sobre el eje real de longitud N.

Transformada Discreta de Fourier

Haciendo uso de la relación de ortogonalidad, obtenemos una expresión simple que nos permite calcular los coeficiente h_n a partir de los valores H_k:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times m} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n N \delta_{n,m} = N h_m$$

El siguiente par de ecuaciones es conocido como la Transformada Discreta de Fourier:

$$\boxed{\begin{cases} H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \\ h_n = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} \end{cases}}$$

$$k = 0, N-1$$

$$n = 0, N-1$$

Indicaremos del siguiente modo que H_k es la Transformada Discreta de Fourier de h_n :

$$h_n \Leftrightarrow H_k$$

$$H_k = TDF\{h_n\}$$

Transformada Discreta de Fourier

Si bien presentamos a h_n como la respuesta impulsiva de un SLI y a H_k como una versión discretizada de su respuesta en frecuencia, la Transformada Discreta de Fourier (TDF) puede aplicarse a cualquier secuencia. Puede pensarse como una forma general de mapear N números complejos en otros N números complejos, donde tiempo y frecuencia juegan roles idénticos e intercambibles.

No existe una definición estándar de la TDF sino que podrán encontrar otras versiones con distintos signos y con diferentes factores, como por ejemplo:

$$\begin{cases} H_k = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{+i\frac{2\pi}{N}k\times n} \\ h_n = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \end{cases}$$

La cantidad de operaciones necesarias para calcular la TDF es proporcional a $N \times N$, sin embargo existen algoritmos mucho más rápidos conocidos como FFT o transformada rápida de Fourier, capaces de realizar el cálculo en $N \times \log_2 N$ operaciones, la condición es que la longitud de la secuencia sea una potencia de dos, es decir que existe α entero, tal que $N = 2^{\alpha}$.

TDF en Notación Matricial

Sea $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. Podemos escribir la TDF como $H_k = \sum_{n=0}^{N-1} W^{k\times n} h_n$

En notación matricial tendremos:

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^{11} & W^{12} & \cdots & W^{1(N-1)} \\ 1 & W^{21} & W^{22} & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)1} & W^{(N-1)2} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{pmatrix}$$

La TDF inversa nos quedará:

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^{-11} & W^{-12} & \cdots & W^{-1(N-1)} \\ 1 & W^{-21} & W^{-22} & \cdots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)1} & W^{-(N-1)2} & \cdots & W^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{N-1} \end{pmatrix}$$

TDF en Notación Matricial

Es decir que podemos escribir la transformada discreta de Fourier utilizando notación matricial, del siguiente modo:

$$\boxed{\mathrm{H}=\mathrm{Wh}}$$

Premultiplicando por la matriz transpuesta conjugada de W, también llamada Hermitiana o Hermítica, y teniendo en cuenta que W es una matriz ortogonal, obtenemos:

$$\mathrm{W}^{\mathrm{H}}\mathrm{H} = \mathrm{W}^{\mathrm{H}}\mathrm{Wh} = N\mathrm{Ih}$$

$$\boxed{\mathrm{h} = \frac{1}{N}\mathrm{W}^{\mathrm{H}}\mathrm{H}}$$

Propiedades de la TDF

La transformada discreta de Fourier no es más que la transformada Z evaluada en puntos regularmente dispuestos sobre el círculo unidad. En consecuencia la mayoría de las propiedades de la TDF nos resultarán familiares debido a nuestro conocimiento previo de la transformada Z.

Analizaremos en detalle las siguientes propiedades de la TDF:

- Periodicidad en tiempo.
- Simetrías
- Teorema del Corrimiento Lineal de la Fase
- Teorema de Convolución

Periodicidad en Tiempo

Una de las consecuencias más importantes de haber discretizado la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para obtener la transformada discreta de Fourier H_k, es la de haber generado periodicidad en el dominio del tiempo:

$$h_{n+N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} e^{i\frac{2\pi}{N}k\times N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} = h_n$$

$$\boxed{h_{n+N} = h_n}$$

Ambas secuencias, tanto h_n como H_k, son periódicas de período N. No nos estamos refiriendo a la secuencia original, la cual sólo está definida para valores de n entre 0 y $N-1$, sino a la secuencia que nos devuelve la transformada discreta de Fourier inversa cuando la evaluamos en otros valores de n.

Forma Centrada de la TDF

Como consecuencia de la peridodicidad de la transformada discreta de Fourier podemos comenzar la sumatoria en cualquier punto del ciclo, siempre que la extendamos por un ciclo. Es común escribir la TDF del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{cases} H_k = \displaystyle\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \\ h_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n} \end{cases}}$$

$$k = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1$$

$$n = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1$$

Llamaremos a estas últimas ecuaciones forma centrada de la TDF y a las anteriores forma estándar de la TDF. La forma centrada es más apropiada para discutir las propiedades de simetría de la TDF, mientras que la forma estándar es más apropiada para implementarla computacionalmente ya que sólo utiliza subíndices positivos.

TDF de una Secuencia Conjugada

Dada la TDF de una secuencia h_n :

$$H_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \qquad\qquad k = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1$$

Tomemos el complejo conjugado:

$$H_k^* = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n^* e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

Hagamos el cambio de variables $k = -k'$:

$$H_{-k'}^* = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n^* e^{-i\frac{2\pi}{N}k'\times n} = TDF\left\{h_n^*\right\}_{k'}$$

$$\boxed{h_n^* \Leftrightarrow H_{-k}^*}$$

TDF de una Secuencia Real

Si h_n es una secuencia real, entonces $h_n = h_n^*$, en consecuencia su transformada de Fourier deberá cumplir:

$$H_k = H_{-k}^*$$

Cuando una función cumple con esta igualdad, se dice que es una función Hermitiana.

Cuando una función es Hermitiana su parte real es par y su parte imaginaria es impar:

$$\mathrm{Re}\left[H_k\right] = \mathrm{Re}\left[H_{-k}\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[H_k\right] = -\mathrm{Im}\left[H_{-k}\right]$$

O dicho de otra manera, su módulo es par y su argumento es impar:

$$\left|H_k\right| = \left|H_{-k}\right|$$

$$\arg\left(H_k\right) = -\arg\left(H_{-k}\right)$$

<u>La transformada de Fourier de una función real es una función Hermitiana, es decir, su espectro de amplitud es par y su espectro de fase es impar.</u>

Descomposición Par e Impar

Toda secuencia h_n se puede descomponer como la suma de dos secuencias, una par y otra impar:

$$h_n = h_n^{par} + h_n^{impar}$$

Donde:

$$h_n^{par} = \frac{h_n + h_{-n}}{2} = h_{-n}^{par} \qquad \text{y} \qquad h_n^{impar} = \frac{h_n - h_{-n}}{2} = -h_{-n}^{impar}$$

Tomando Transformada de Fourier a estas ecuaciones, es fácil de ver las siguientes propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{c} h_n \Leftrightarrow H_k \\ h_n^{par} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left[H_k\right] \\ h_n^{impar} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left[H_k\right] \end{array}}$$

La transformada de Fourier de una función par es real y la de una función impar es imaginaria pura.

Teorema de Parseval

Se define la energía de una secuencia como la suma de los cuadrados de sus amplitudes, es decir:

$$Energía\ de\ h_n = \sum_n |h_n|^2$$

El teorema de Parseval dice que la energía de una secuencia de longitud N en el dominio de la transformada discreta de Fourier es N veces la energía de la secuencia en el dominio del tiempo:

$$\boxed{N\sum_{n=0}^{N-1}|h_n|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|H_k|^2}$$

Teorema del Corrimiento Lineal de la Fase

Veamos como se relaciona la TDF de una secuencia retardada en n_0 muestras, con la TDF de la secuencia original:

$$TDF\left\{h_{n-n_0}\right\}_k = \sum_n h_{n-n_0} e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

Haciendo el cambio de variables $m = n - n_0$, obtenemos:

$$TDF\left\{h_{n-n_0}\right\}_k = \sum_m h_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n_0}\sum_m h_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times m} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n_0} TDF\left\{h_n\right\}_k$$

$$TDF\left\{h_{n-n_0}\right\}_k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n_0} H_k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n_0}\left|H_k\right| e^{i\phi_k} = \left|H_k\right| e^{i(\phi_k - \omega_k\times n_0)}$$

Observe que con los debidos recaudos para que $H_k \times e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n_0}$ siga siendo Hermitiana, esta expresión es válida aún cuando queremos retardar una señal real en una fracción del intervalo de muestro.

Teorema de Convolución

Consideremos dos secuencias f_n y g_n, con transformadas de Fourier:

$$F_k = \sum_n f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

$$\mathrm{G}_k = \sum_n g_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n}$$

Multipliquemos las transformadas:

$$F_k \times \mathrm{G}_k = \sum_n f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} \times \sum_m g_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times m} = \sum_n \sum_m f_n g_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n+m)}$$

Tomando las transformada inversa al producto de las transformadas, obtenemos:

$$\frac{1}{N}\sum_k F_k G_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times l} = \frac{1}{N}\sum_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times l}\sum_n \sum_m f_n g_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n+m)} = \frac{1}{N}\sum_n f_n \sum_m g_m \sum_k e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n+m-l)}$$

Teorema de Convolución

Utilizando la relación de ortogonalidad de la transformada discreta de Fourier, obtenemos:

$$\frac{1}{N}\sum_k F_k G_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times l} = \frac{1}{N}\sum_n f_n \sum_m g_m \sum_k e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n+m-l)} = \frac{1}{\cancel{N}}\sum_n f_n \sum_m g_m \cancel{N}\delta_{m,l-n} = \sum_n f_n g_{l-n}$$

$$\frac{1}{N}\sum_k F_k G_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\times l} = f_n * g_n$$

Es decir:

$$\boxed{f_n * g_n \Leftrightarrow F_k \times G_k}$$

Expresado en forma polar:

$$F_k \times G_k = |F_k| e^{i\phi_F} \times |G_k| e^{i\phi_G} = |F_k| \times |G_k| e^{i\left(\phi_{F_k} + \phi_{G_k}\right)}$$

Es decir que convolucionar en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar en el dominio de las frecuencias. Multiplicar en frecuencias es equivalente a multiplicar espectros de amplitud y sumar espectros de fase.

Teorema de Convolución

De manera análoga se puede demostrar que multiplicar en tiempo es equivalente a convolucionar en el dominio de las frecuencias:

$$TDF\left\{ f_n \times g_n \right\}_k = \frac{1}{N} \sum_j F_j G_{k-j}$$

$$\boxed{f_n \times g_n \Leftrightarrow F_k * G_k}$$

Observe que existe un factor $1/N$ cuando convolucionamos en el dominio de las frecuencias, que no aparece cuando convolucionamos en el dominio del tiempo.

Tiempos y frecuencias tienen roles indistinguibles e intercambiables en la transformada de Fourier, si determinada acción en un dominio tiene cierta consecuencia en el otro dominio, esa misma acción en el segundo dominio tendrá igual consecuencia en el primer dominio.

Convolución Circular

Las TDF F_k y G_k no son en rigor las transformadas de las secuencias f_n y g_n de longitud N, sino que son las las transformadas de Fourier de dos secuencias infinitas, extendidas a periódicas, de período N, que en el primer ciclo coinciden con las secuencias originales. Por lo tanto el producto de las transformadas $F_k \times G_k$ en el dominio de las frecuencias corresponde a la convolución de dos secuencias periódicas e infinitas en el dominio del tiempo. Es por ello que a esta convolución se la llama convolución circular a diferencia de la convolución que hemos considerado hasta ahora que se denomina convolución lineal. Veamos un ejemplo, dada dos secuencias a_n y b_n de longitud 4:

$$a_n = (1, 3, 0, 2)$$

$$b_n = (1, 0, 2, 2)$$

El resultado de la convolución circular será la siguiente secuencia de período 4:

$$a_n * b_n = (7, 7, 6, 10)$$

Mientras que el resultado de la convolución lineal será la siguiente secuencia de longitud 7:

$$a_n * b_n = (1, 3, 2, 10, 6, 4, 4)$$

Diagrama de Convolución Circular

	$b_{0(-4)}$	$b_{1(-3)}$	$b_{2(-2)}$	$b_{3(-1)}$	b_0	b_1	b_2	b_3
a_0					a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3
a_1				$a_1b_{3(-1)}$	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	
a_2			$a_2b_{2(-2)}$	$a_2b_{3(-1)}$	a_2b_0	a_2b_1		
a_3		$a_3b_{1(-3)}$	$a_3b_{2(-2)}$	$a_3b_{3(-1)}$	a_3b_0			

$$c_n = \sum_k a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + a_3 b_{n-3}$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 + a_1b_{3(-1)} + a_2b_{2(-2)} + a_3b_{1(-3)} \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_{3(-1)} + a_3b_{2(-2)} \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + a_3b_{3(-1)} \\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0
\end{aligned}
$$

Correlación Cruzada

Definimos la correlación cruzada $\phi_{ab}(\tau)$ entre dos secuencias a_n y b_n, como la convolución entre ambas secuencias cuando la primera es revertida, adelantada en su longitud y conjugada:

$$\phi_{ab}(\tau) = a_{-n}^{*} * b_n = \sum_n a_n^{*} b_{n+\tau} \Leftrightarrow A_k^{*} B_k$$

Donde:

$$a_{-n}^{*} = (a_{N-1}^{*}, a_{N-2}^{*}, a_{N-3}^{*}, \ldots, a_2^{*}, a_1^{*}, \underset{\uparrow}{a_0^{*}})$$

La correlación cruzada no es conmutativa. Conmutar las secuencias de entrada es equivalente a revertir y conjugar el resultado:

$$\phi_{ab}(\tau) = \phi_{ba}^{*}(-\tau)$$

Claro que si las secuencias son reales, la consecuencia de conmutar las entradas sera únicamente la de revertir la secuencia resultante.

Correlación Cruzada

Demostración:

Sea $c_n = a^*_{-n}$, entonces la convolución de c_n con b_n es:

$$\phi_{ab}(\tau) = \left(c_n * b_n\right)_\tau = \sum_m c_{\tau-m} b_m = \sum_m a^*_{-(\tau-m)} b_m = \sum_m a^*_{m-\tau} b_m$$

Haciendo el siguiente cambio de variables $n = m - \tau$, nos queda:

$$\boxed{\phi_{ab}(\tau) = \sum_n a^*_n b_{n+\tau}}$$

Correlación Cruzada

Veamos a qué es igual la tranformada de Fourier de $c_n = a^*_{-n}$:

$$C_k = \sum_n c_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} = \sum_n a^*_{-n} e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times n} = \left(\sum_n a_{-n} e^{i\frac{2\pi}{N}k\times n}\right)^*$$

Si hacemos el cambio de variables $m = -n$, obtenemos:

$$C_k = \left(\sum_m a_m e^{-i\frac{2\pi}{N}k\times m}\right)^* = A^*_k = \left|A_k\right| e^{-i\phi_{A_k}}$$

Es decir que correlacionar en el dominio del tiempo, es equivalente a multiplicar los espectros de amplitud y restar los espectros de fase:

$$\boxed{\phi_{ab}(\tau) = \sum_n a^*_n b_{n+\tau} \Leftrightarrow A^*_k B_k = \left|A_k\right|\left|B_k\right| e^{i\left(\phi_{B_k} - \phi_{A_k}\right)}}$$

Diagrama de Correlación

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
\hline
a_2^* & a_2^* b_0 & a_2^* b_1 & a_2^* b_2 & a_2^* b_3 & a_2^* b_4 \\
a_1^* & a_1^* b_0 & a_1^* b_1 & a_1^* b_2 & a_1^* b_3 & a_1^* b_4 \\
a_0^* & a_0^* b_0 & a_0^* b_1 & a_0^* b_2 & a_0^* b_3 & a_0^* b_4
\end{array}$$

$$\phi_{ab}(\tau) = \sum_n a_n^* b_{n+\tau}$$

$$\phi_{ab}(-2) = a_2^* b_0$$

$$\phi_{ab}(-1) = a_2^* b_1 + a_1^* b_0$$

$$\phi_{ab}(\;\;0) = a_2^* b_2 + a_1^* b_1 + a_0^* b_0$$

$$\phi_{ab}(+1) = a_2^* b_3 + a_1^* b_2 + a_0^* b_1$$

$$\phi_{ab}(+2) = a_2^* b_4 + a_1^* b_3 + a_0^* b_2$$

$$\phi_{ab}(+3) = a_1^* b_4 + a_0^* b_3$$

$$\phi_{ab}(+4) = a_0^* b_4$$

Autocorrelación

La autocorrelación es la correlación cruzada de una secuencia consigo misma:

$$\boxed{\phi_{aa}(\tau) = \sum_n a_n^* a_{n+\tau} \Leftrightarrow A_k^* A_k = |A_k||A_k| e^{i\left(\phi_{A_k} - \phi_{A_k}\right)} = |A_k|^2}$$

La transformada de Fourier de la autocorrelación es el espectro de potencia.

El espectro de potencia es real, por lo tanto la secuencia autocorrelación en tiempo es una función par o simétrica.

Al efectuar la operación autocorrelación podemos ver que se pierde la información de fase. Es decir que todas las secuencias que tengan el mismo espectro de amplitud, sin importar que espectro de fase posean, tendrán la misma autocorrelación y el mismo espectro de potencia.

La Correlación en el Dominio de la Transformada Z

La correlación cruzada es simple de escribir en el dominio de la transformada Z:

$$\phi_{ab}(\tau) = a^{*}_{-n} * b_n \Leftrightarrow A^{*}(1/z)B(z)$$

En $A^{*}(1/z)$ estamos conjugando los coeficientes del polinomio pero no estamos conjugando la variable compleja z, en vez de ello estamos reemplazando z por $1/z$, lo cual sobre el círculo unidad es equivalente a conjugarla.

La autocorrelación en el dominio de la transformada Z es igual al espectro de potencia en el mismo dominio, y está dado por:

$$\phi_{aa}(\tau) \Leftrightarrow A^{*}(1/z)A(z)$$

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Five.