Análisis de Señales en Geofísica

4° Clase

Cuplas y Filtros Elementales

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Cuplas y Filtros Elementales

$1 + kz$ cupla o dipolo

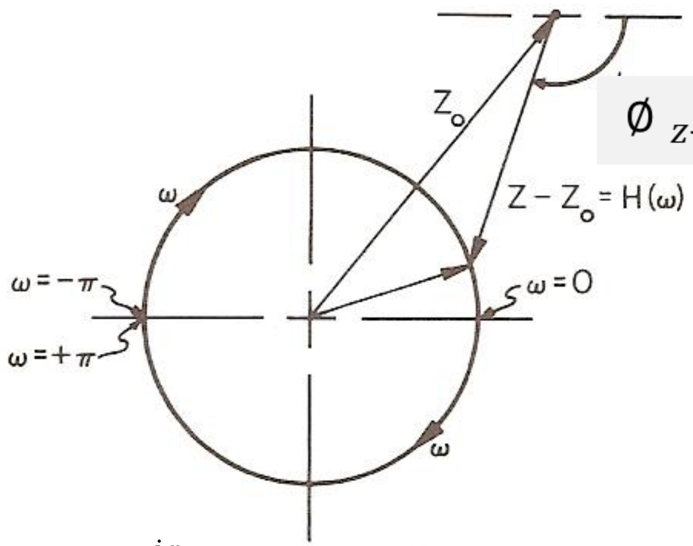
$\dfrac{1}{1 + kz}$ inversa de un dipolo

$\dfrac{1+\mathrm{kz}}{1+\mathrm{qz}}$ cociente de dipolos

La Cupla o Dipolo

La cupla es el más simple de los filtros digitales y su transformada Z se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(z) = z - z_0$$



$$\phi_{z-z_0} \approx \arg(z_0) \pm \pi$$

Si $z = e^{-i\omega}$, entonces $\omega = -\arg(z)$

$$H(z) = H(e^{-i\omega}) = H(\omega)$$

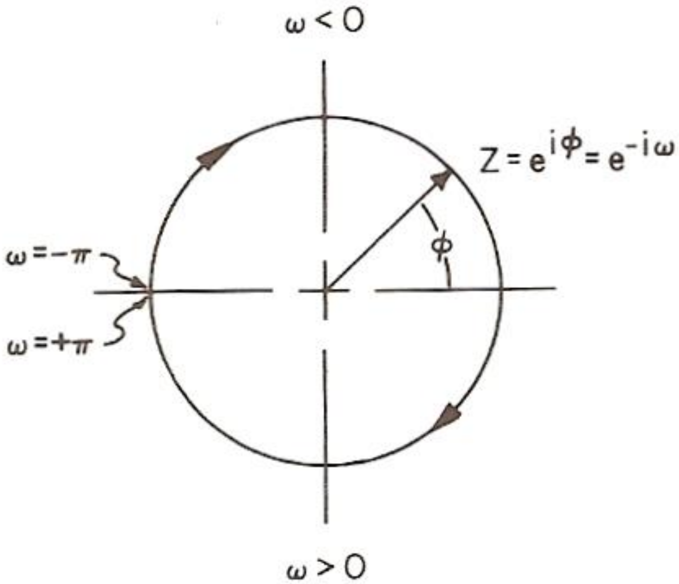
$$|H(z)| = |z - z_0|$$

$$\arg\left[H(z)\right] = \phi$$

La Cupla o Dipolo

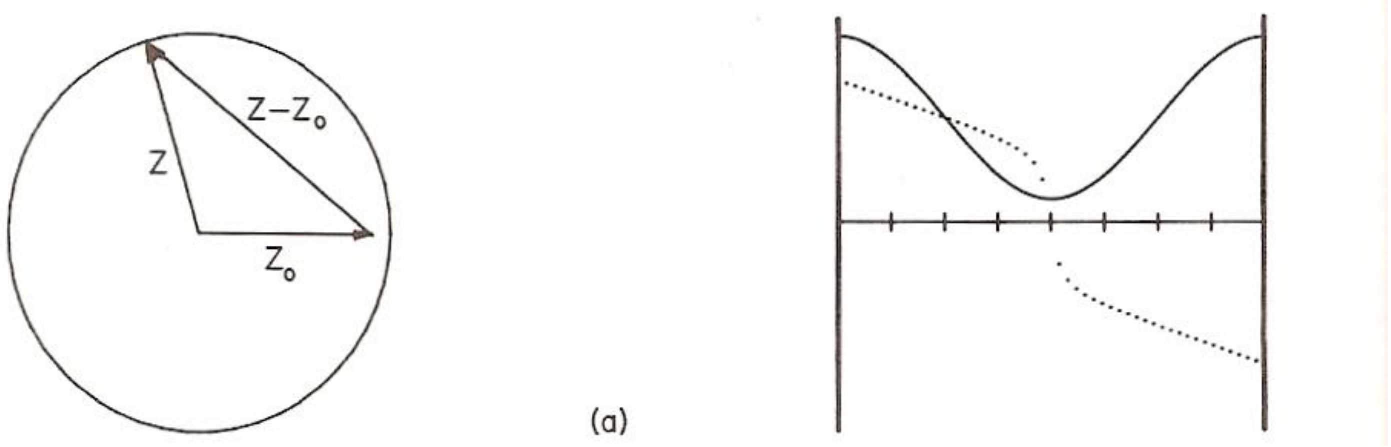
El argumento o la fase de la variable $z = e^{-i\omega}$, es una función negativa de la frecuencia:

$$\arg(z) = \phi = -\omega$$



La Cupla o Dipolo

Si el cero de la transformada Z del diplo se encuentra dentro del círculo unidad, la fase del dipolo se despliega entre $-\pi$ y π, y tendrá un salto de 2π:



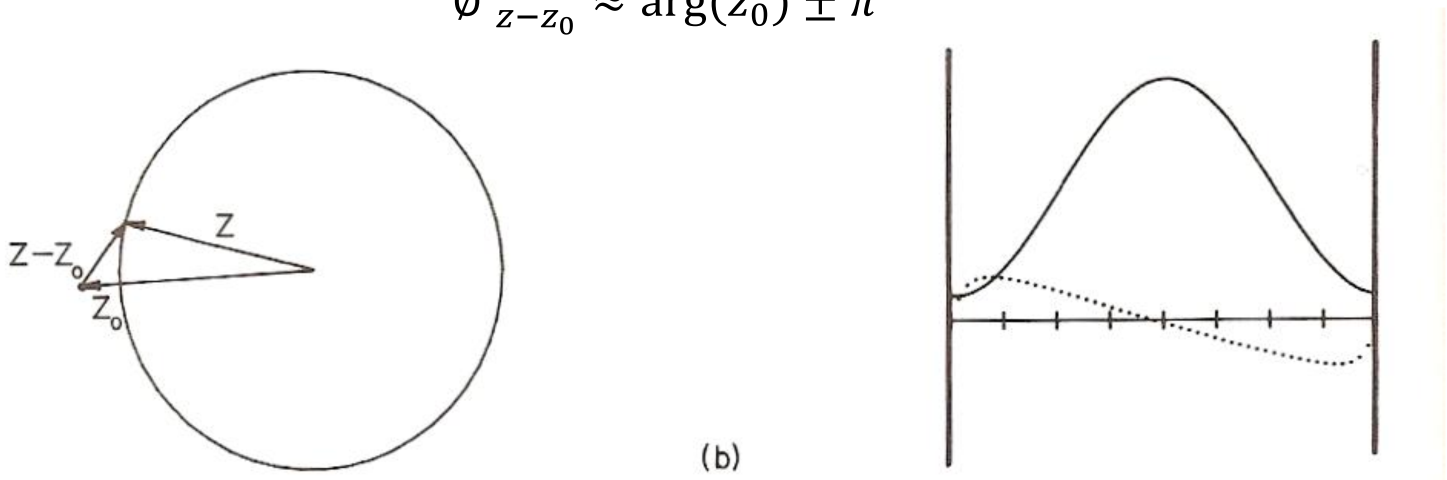
Por eso se dice que el dipolo es de fase máxima.

Cuando el cero se acerca al círculo unidad el espectro de amplitud tiende a un valor pequeño para la frecuencia igual a la fase del cero cambiada de signo.

La Cupla o Dipolo

Si el cero de la transformada Z del dipolo se encuentra fuera del círculo unidad, la fase del dipolo se desplegará en un entorno de la fase del cero $\pm\pi$, es decir:

$$\emptyset_{\,z-z_0} \approx \arg(z_0) \pm \pi$$



Por eso se dice que el dipolo es de fase mínima. Cuanto más lejos esté el cero del círculo unidad, menor será la variación de la fase con la frecuencia.

La Cupla o Dipolo

Calculemos las expresiones analíticas de los espectros de amplitud y de fase de una cupla, cuya transformada Z está dada por la siguiente expresión, la cual difiere de la anterior en un factor de escala:

$$H(z) = h_1 + h_2 z$$

Evaluemos la transformada Z sobre el círculo unidad:

$$H(\omega) = h_1 + h_2 e^{-i\omega}$$

El espectro de amplitud al cuadrado, tambien conocido como espectro de potencia, está dado por:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = \left(h_1 + h_2 e^{-i\omega}\right)\left(h_1^* + h_2^* e^{i\omega}\right)$$

$$|H(\omega)|^2 = h_1 h_1^* + h_1 h_2^* e^{i\omega} + h_2 h_1^* e^{-i\omega} + h_2 h_2^*$$

$$|H(\omega)|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2^* e^{i\omega} + h_2 h_1^* e^{-i\omega}$$

$$|H(\omega)|^2 = h_1^2 + h_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[h_1 h_2^* e^{i\omega}\right]$$

$$\boxed{|H(\omega)| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[h_1 h_2^* e^{i\omega}\right]}}$$

Mientras que el espectro de fase está dado por:

$$\boxed{\phi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,H(\omega)}{\mathrm{Re}\,H(\omega)}\right)}$$

La Cupla o Dipolo

Una propiedad de central importancia de la cupla o dipolo es que su espectro de amplitud no cambia si intercambiamos y conjugamos los coeficientes, es decir:

$$H_1(z) = h_1 + h_2 z$$

$$H_2(z) = h_2^* + h_1^* z$$

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)|$$

Esto se verifica reemplazando los valores de los coeficientes en la expresión deducida en la diapositiva anterior para el espectro de amplitud.

Veamos que sucede con los ceros o raices de estos dipolos al intercambiar y conjugar los coeficientes:

Si $H_1(z_1) = 0$ entonces $z_1 = -h_1/h_2$

Si $H_2(z_2) = 0$ entonces $z_2 = -h_2^*/h_1^*$

Es decir que:

$\boxed{z_1 = 1/z_2^*}$ son recíprocos conjugados

El espectro de fase no es invariante ante este cambio, sino que convierte una cupla de fase mínima en una cupla de fase máxima y vicerversa. Cuando dos secuencias de igual longitud tienen el mismo espectro de amplitud pero distinto espectro de fase, se dice que son secuencias equivalentes.

Ejemplo de Cuplas Equivalentes

Consideremos las cuplas equivalentes:

$$H_1(z) = 1 + 0.5z$$
$$H_2(z) = 0.5 + z$$

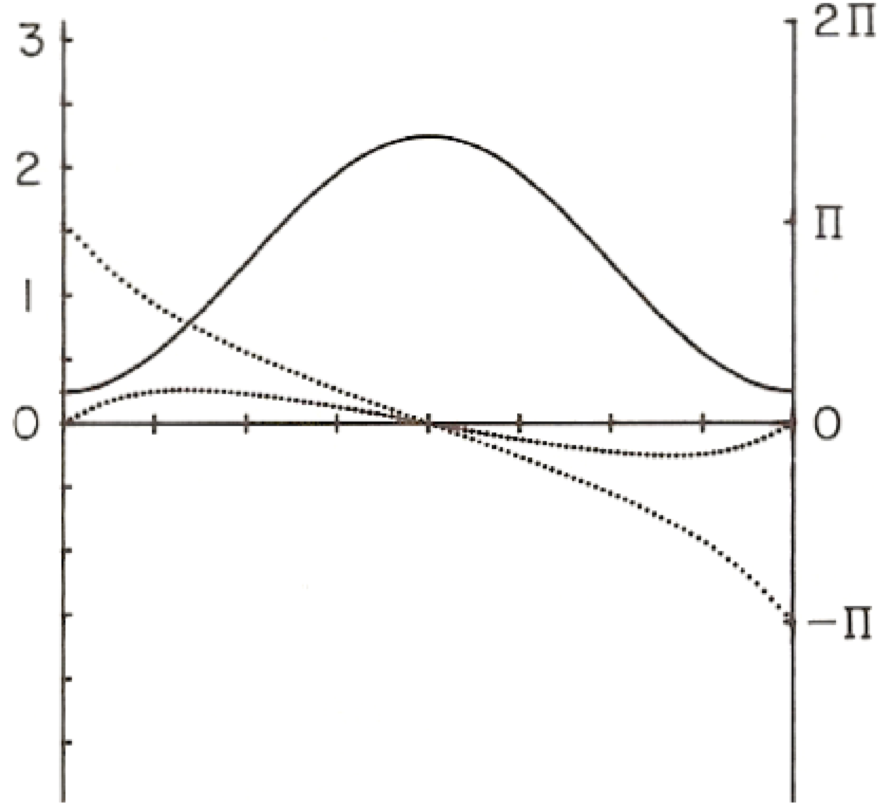
El espectro de amplitud para ambas cuplas es:

$$\left|H(\omega)\right| = \sqrt{\tfrac{5}{4} + \cos(\omega)}$$

Los espectros de fase son respectivamente:

$$\phi_1(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\omega)}{0.5 + \cos(\omega)}\right)$$

$$\phi_2(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\omega)}{2 + \cos(\omega)}\right)$$



La Inversa de una Cupla

La inversa de una cupla es un operador con un único polo, es decir que es un filtro autorregresivo de primer orden:

$$H(z) = \frac{1}{z - z_p}$$

Cuando el polo se acerca al círculo unidad el espectro de amplitud tiende a un valor muy grande para la frecuencia igual al argumento del polo cambiado de signo.

Calculemos el espectro de potencia de un filtro con un único polo:

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{(z - z_p)(z^* - z_p^*)} = \frac{1}{z_p^2 + z^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[z_p z^*\right]}$$

Utilizando coordenadas polares:

$$z = e^{-i\omega} \qquad \text{y} \qquad z_p = \rho e^{i\phi_p} = \rho e^{-i\omega_p}$$

El espectro de potencia nos queda:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\omega - \omega_p)}$$

La Inversa de una Cupla

Vamos a analizar el espectro de potencia en un entorno de ω_p:

$$\cos(\omega-\omega_p)=1-\left(\omega-\omega_p\right)^2/2+\cdots$$

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{\left(1-\rho\right)^2-\rho(\omega-\omega_p)^2}$$

Veamos que sucede cuando el polo se acerca al círculo unidad por fuera:

$$\rho=1+\varepsilon\rightarrow 1^+$$

$$\varepsilon\rightarrow 0^+$$

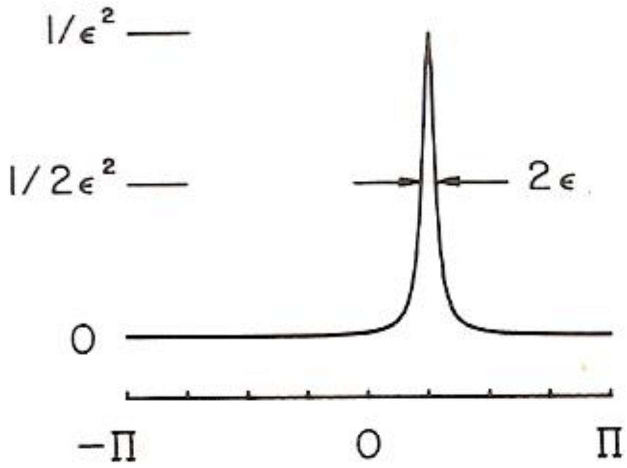
Lo hacemos acercar por fuera para que el filtro sea causal y estable.

Entonces el espectro de potencia del filtro con un único polo cercano al círculo unidad, para valores de ω cercanos a ω_p es:

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{\varepsilon^2+\left(\omega-\omega_p^2\right)}$$

La Inversa de una Cupla

Grafiquemos la última expresión para un polo ubicado en $z_p = 1.1e^{-i\frac{\pi}{4}}$, es decir $\varepsilon = 0.1$ y $\omega_p = \pi/4$:



Un filtro con un pico angosto puede ser utilizado para extraer una señal con una frecuencia conocida, que se encuentra sumergida en un ruido con un espectro mucho más ancho. El filtro deja pasar la señal centrada en la frecuencia ω_p mientras que rechaza o no deja pasar las restantes frecuencias asociadas al ruido.

Utilidad

Tanto los filtros con un único cero como los filtros con un único polo son demasiado elementales como para tener un uso práctico, su utilidad es principalmente didáctica. También pueden ser utilizados como los elementos básicos para construir filtros más largos y complejos.

Ambos filtros tienen salidas complejas aún cuando las entradas sean reales. Para hacer un filtro con una respuesta real debemos colocar en cascada otro filtro que tenga otro cero u otro polo en el valor complejo conjugado del cero o polo del primer filtro. En el caso de un filtro con un único polo generaríamos un filtro con dos polos donde uno es el complejo conjugado del otro, su espectro de amplitud se vería similar al del filtro con un único polo, pero tendría un pico adicional en la frecuencia $-\omega_p$.

Retardo de Fase

Si excitamos un SLI con una exponencial compleja, los cambios entre la entrada y la salida serán el de la amplitud y el de la fase:

$$e^{i\Omega t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow H(\Omega)e^{i\Omega t} = \left|H(\Omega)\right| e^{i\phi(\Omega)} e^{i\Omega t} = \left|H(\Omega)\right| e^{i\Omega t + i\phi(\Omega)}$$

$$e^{i\Omega t + i\phi(\Omega)} = e^{i\Omega\left(t + \frac{\phi(\Omega)}{\Omega}\right)} = e^{i\Omega\left(t - \tau_{ph}\right)}$$

$$\boxed{\tau_{\mathrm{ph}} = -\frac{\phi(\Omega)}{\Omega}}$$

Es decir que el corrimiento en fase de la salida respecto de la entrada puede verse como un retardo en tiempo llamado retardo de fase. El problema con este retardo es que tiene una ambigüedad de $2\pi n/\Omega$ o nT, donde T es el período.

En propagación de ondas la velocidad de fase es el cociente entre la distancia recorrida por la onda y el retardo de fase producido.

Retardo de Grupo

Cuando la fase varía linealmente con la frecuencia y el retardo de fase es independiente de la frecuencia, el retardo de grupo no es más que el retardo de fase. Pero cuando el retardo de fase varía con la frecuencia el retardo de grupo toma un valor diferente.

Cuando una señal contiene dos frecuencias muy próximas se produce un fenómeno de interferencia conocido como batido de ondas:

$$x(t) = e^{i\Omega_1 t} + e^{i\Omega_2 t}$$

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \qquad \Delta\Omega = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$$

$$x(t) = e^{i(\Omega+\Delta\Omega)t} + e^{i(\Omega-\Delta\Omega)t} = e^{i\Omega t}\left(e^{i\Delta\Omega t} + e^{-i\Delta\Omega t}\right) = 2\cos\left(\Delta\Omega t\right)e^{i\Omega t}$$

Es decir que la suma de estas dos componentes de frecuencias próximas, se verá como una exponencial compleja de frecuencia media, cuya amplitud es modulada por un coseno de frecuencia muy baja.

Retardo de Grupo

Ahora excitemos un SLI con esta señal que contiene dos frecuencias muy próximas. Supongamos que el sistema no modifica las amplitudes pero que introduce un corrimiento de la fase diferente para cada frecuencia:

$$x(t) = e^{i\Omega_1 t} + e^{i\Omega_2 t} \rightarrow \boxed{SLI} \rightarrow y(t) = e^{i\Omega_1 t + i\phi_1} + e^{i\Omega_2 t + i\phi_2}$$

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad \Delta\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$$

$$y(t) = e^{i(\Omega+\Delta\Omega)t + i(\phi+\Delta\phi)} + e^{i(\Omega-\Delta\Omega)t+i(\phi-\Delta\phi)} = e^{i(\Omega t+\phi)}\left(e^{i(\Delta\Omega t+\Delta\phi)} + e^{-i(\Delta\Omega t+\Delta\phi)}\right)$$

$$y(t) = 2\cos\left(\Delta\Omega t + \Delta\phi\right)e^{i(\Omega t+\phi)} = 2\cos\left(\Delta\Omega t + \Delta\phi\right)e^{i\Omega\left(t-\tau_{ph}\right)}$$

Retardo de Grupo

Reescribamos el factor de modulación de la siguiente forma:

$$\cos\left(\Delta\Omega t + \Delta\phi\right) = \cos\left[\Delta\Omega\left(t + \frac{\Delta\phi}{\Delta\Omega}\right)\right] = \cos\left[\Delta\Omega\left(t - \tau_g\right)\right]$$

$$\tau_{\mathrm{g}} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta\Omega}$$

$$\boxed{y(t) = 2\times\cos\left[\Delta\Omega\left(t - \tau_{\mathrm{g}}\right)\right]\times e^{i\Omega\left(t-\tau_{ph}\right)}}$$

Si el espectro de fase está definido en un dominio continuo de las frecuencias, entonces el retardo de grupo es:

$$\boxed{\tau_{\mathrm{g}} = -\frac{d\phi}{d\Omega}}$$

Retardo de Grupo

En propagación de ondas la velocidad de grupo es el cociente entre la distancia recorrida por la onda y el retardo de grupo producido. Es la velocidad con la que se propaga la envolvente de una señal, es decir la velocidad de propagación de la energía.

Cuando el retardo de grupo τ_g es función de la frecuencia, algunas frecuencias se retardarán más que otras y diremos que el sistema es dispersivo, en estos casos la forma de la señal de salida será distinta a la forma de la señal de entrada aún cuando el espectro de amplitud no cambie.

Cuando una señal sufre un corrimiento constante de la fase, por ejemplo cuando le aplicamos la transformada de Hilbert, no hay retardo de grupo, es decir no cambia la envolvente ni hay retardo de energía, pero sí existe un cambio de forma.

Filtros Pasa-Todo

Definición :

Un filtro pasa-todo es aquel filtro que introduce un cambio en el espectro de fase de la señal pero que no modifica su espectro de amplitud.

Es decir que el espectro de amplitud de un filtro pasa-todo tendrá un valor constante e igual a uno:

$$\boxed{\left| H_{pasa-todo}(\omega) \right| = 1}$$

El caso trivial de un filtro pasa-todo es la secuencia impulso unitario δ_n que no solo no modifica el espectro de amplitud sino que tampoco modifica el espectro de fase. El impulso unitario retardado δ_{n-k} no modifica la forma de la señal sino que solo la retarda introduciendo un cambio lineal de la fase.

Impulso Unitario Retardado

Analicemos la respuesta en frecuencia de δ_{n-k}:

$$h_n = \delta_{n-k}$$

$$H(z) = z^k$$

$$H(\omega) = e^{-i\omega k}$$

$$\left|H(\omega)\right| = \left|e^{-i\omega k}\right| = 1$$

$$\boxed{\phi(\omega) = -\omega k}$$

Es decir que el impulso unitario retardado tiene un espectro de fase lineal, lo que corresponde a un corrimiento en tiempo de k muestras.

Propiedad 1

$$X(\omega) = \sum_k x_k e^{-i\omega k}$$

$$\boxed{\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -i\sum_k k x_k e^{-i\omega k}}$$

$$X(z) = \sum_k x_k z^k$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_k k x_k z^{k-1}$$

$$\boxed{z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_k k x_k z^k}$$

Comparando la expresiones recuadradas, encontramos que sobre el círculo unidad:

$$i\frac{dX(\omega)}{d\omega} = z\frac{dX(z)}{dz}$$

Es decir:

$$\boxed{\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -iz\frac{dX(z)}{dz}}$$

Propiedad 2

Sea h_n un filtro pasa todo:

$$\left|H(\omega)\right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad H(\omega) = 1 \times e^{i\phi(\omega)}$$

Tomando logaritmo natural:

$$\ln\left[H(\omega)\right] = \ln\left[1 \times e^{i\phi(\omega)}\right] = i\phi(\omega)$$

$$\boxed{\phi(\omega) = -i \ln\left[H(\omega)\right]}$$

Filtro pasa-todo con un único cero y con un único polo

La clave para construir un filtro pasa-todo con un único cero z_0 y con un único polo z_p es colocar el cero en el recíproco conjugado del polo, es decir:

$$z_0 = \frac{1}{z_p^*}$$

$$H(z) = \frac{z - \dfrac{1}{z_p^*}}{1 - \dfrac{z}{z_p}}$$

Para que el filtro sea causal y estable el polo debe estar fuera del círculo unidad, en consecuencia el cero estará dentro y la fase será mixta.

Retardo de grupo de un filtro pasa-todo

Calculemos el retardo de grupo de un filtro pasa todo:

$$\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega} = iz\frac{d\phi}{dz} = iz\frac{d}{dz}\left[-i\ln H(z)\right]$$

Si el filtro pasa todo es un filtro con un único cero y con un único polo, y además es causal y estable:

$$H(z) = \frac{z - 1/z_p^*}{1 - z/z_p} \qquad \left|z_p\right| > 1$$

$$\tau_g = iz\frac{d}{dz}\left[-i\ln\left(\frac{z - 1/z_p^*}{1 - z/z_p}\right)\right] = \frac{1 - \dfrac{1}{z_p z_p^*}}{\left(1 - \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z_p^*}\right)\left(1 - z\dfrac{1}{z_p}\right)} > 0$$

Secuencias de Mínimo Retardo

La fase de un filtro pasa todo causal y estable es monotónicamente decreciente en ω por lo que provoca un retardo de grupo positivo para todas las frecuencias. La consecuencia de esto es que de todas las secuencias de igual longitud que se pueden encontrar con un mismo espectro de amplitud, la secuencia de fase mínima es la que tiene la mayor cantidad de energía acumulada en el comienzo. Es decir que <u>las secuencias de fase mínima son además de mínimo retardo</u>.

$$F_{equivalente}(z) = F_{fase\ mínima}(z) \times H_{pasa\ todo}(z)$$

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Four.
- Claerbout, Jon F. (1992), Earth Sounding Analysis, Processing versus Inversion, Blackwell Scientific Publications