Análisis de Señales en Geofísica

3° Clase
Respuesta en Frecuencia de los Sistemas Lineales e Invariantes

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Funciones y Valores Propios

Definición:

Diremos que una función x_n es una función propia de un sistema lineal e invariante si cuando excitamos el sistema con esta función nos responde entregándonos la misma función x_n pero escalada con un factor α, este factor de escala es llamado valor propio del sistema:

$$x_n \rightarrow \boxed{S\{\ \}} \rightarrow y_n = S\{x_n\} = \alpha x_n$$

Ejemplo:

$$e^{\alpha t} \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\{\ \}} \rightarrow \frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \alpha e^{\alpha t}$$

Respuesta en Frecuencia

Excitemos un SLI de respuesta impulsiva h_n, con una función exponencial compleja:

$$x_n = e^{i\omega n} \rightarrow \boxed{h_n} \rightarrow y_n = h_n * e^{i\omega n} = \sum_k h_k e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_k h_k e^{-i\omega k}$$

Llamaremos respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de los SLI a:

$$\boxed{H(\omega) = \sum_k h_k e^{-i\omega k}}$$

$$e^{i\omega n} \rightarrow \boxed{h_n} \rightarrow H(\omega) e^{i\omega n}$$

Es decir que la función exponencial compleja es una función propia de los SLI y su valor propio asociado es la respuesta en frecuencia $H(\omega)$.

Propiedades de H(ω)

- Es una función continua de la frecuencia angular digital ω.
- Es una función periódica de la frecuencia de período 2π.
- Está completamente determinada por la respuesta impulsiva del sistema lineal e invariante.
- La respuesta impulsiva del sistema puede ser invertida a partir de ella, es decir que define perfectamente al sistema.
- Por lo general tomará valores complejos, es decir que introducirá cambios de escala y corrimientos de fase.

Relación con la Transformada Z

La transformada Z de la respuesta impulsiva h_n está dada por:

$$H(z) = \sum_k h_k z^k$$

Si evaluamos $H(z)$ sobre el círculo unidad $z = e^{-i\omega}$, obtenemos:

$$H(e^{-i\omega}) = \sum_k h_k e^{-i\omega k} = H(\omega)$$

Es decir que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de un SLI es la transformada Z de su respuesta impulsiva evaluada sobre el círculo unidad. Esto significa que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, es también una transformada que va del dominio discreto del tiempo al dominio continuo de las frecuencias, y como veremos más adelante, es una de las cuatro formas de la transformada de Fourier.

Ejemplo 1:

Suavicemos una señal x_n aplicándole un filtro de 3 puntos:

$$y_n = \tfrac{1}{3}\left(x_{n-1} + x_n + x_{n+1}\right)$$

Tomemos transformada Z:

$$Y(z) = \tfrac{1}{3}\left[zX(z) + X(z) + z^{-1}X(z)\right] = \tfrac{1}{3}\left(z + 1 + z^{-1}\right)X(z)$$

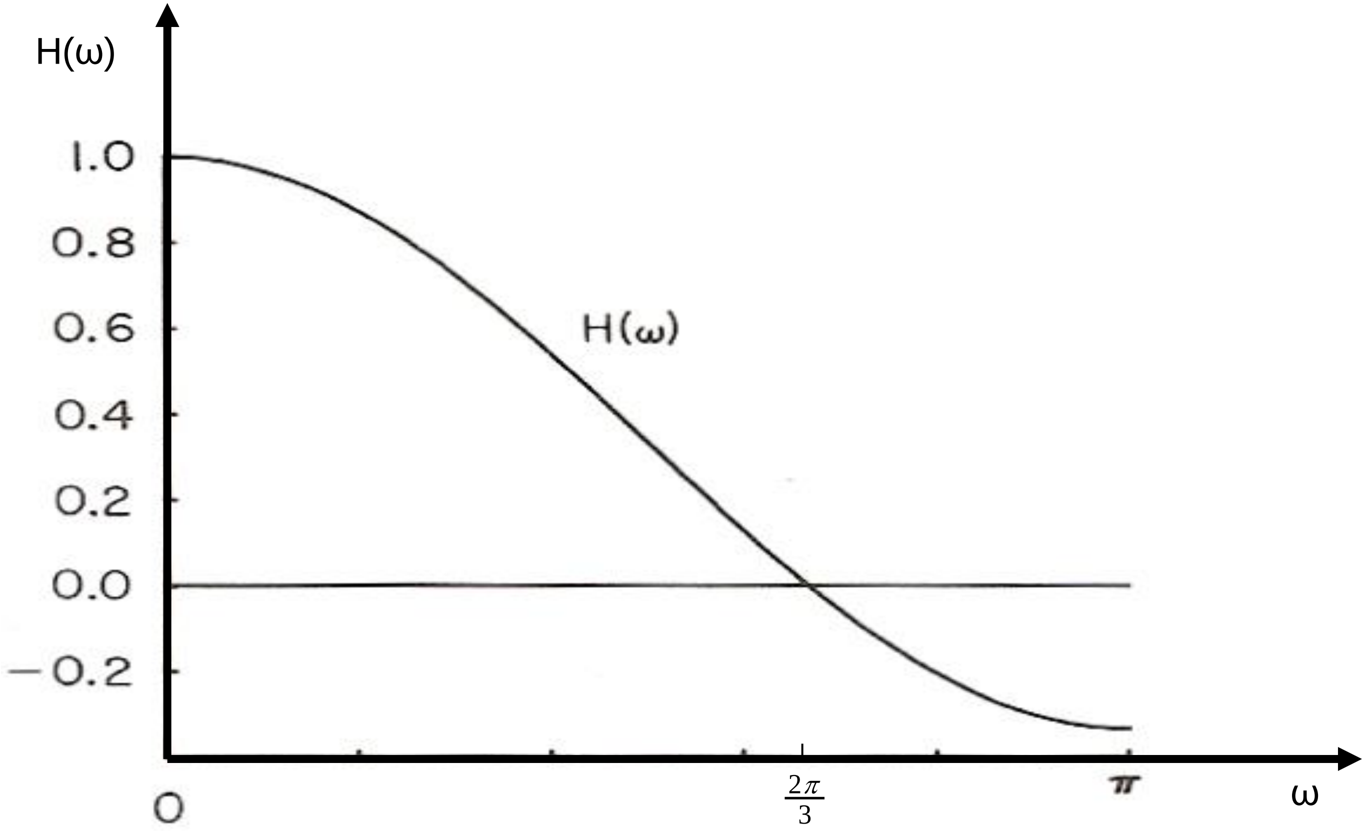
Evaluemos está expresión sobre el círculo unidad:

$$Y(\omega) = \tfrac{1}{3}\left(e^{-i\omega} + 1 + e^{+i\omega}\right)X(\omega) = \tfrac{1}{3}\left(1 + 2\cos(\omega)\right)X(\omega)$$

La respuesta en frecuencia del sistema, también llamada función de transferencia, está dada por:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cos(\omega)$$

Ejemplo 1:



$$H(\omega) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cos(\omega)$$

Ejemplo 2:

Suavicemos la señal x_n con un filtro de 3 puntos diferente:

$$y_n = \tfrac{1}{4}\left(x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1}\right)$$

Tomemos transformada Z:

$$Y(z) = \tfrac{1}{4}\left[zX(z) + 2X(z) + z^{-1}X(z)\right] = \tfrac{1}{4}\left(z + 2 + z^{-1}\right)X(z)$$

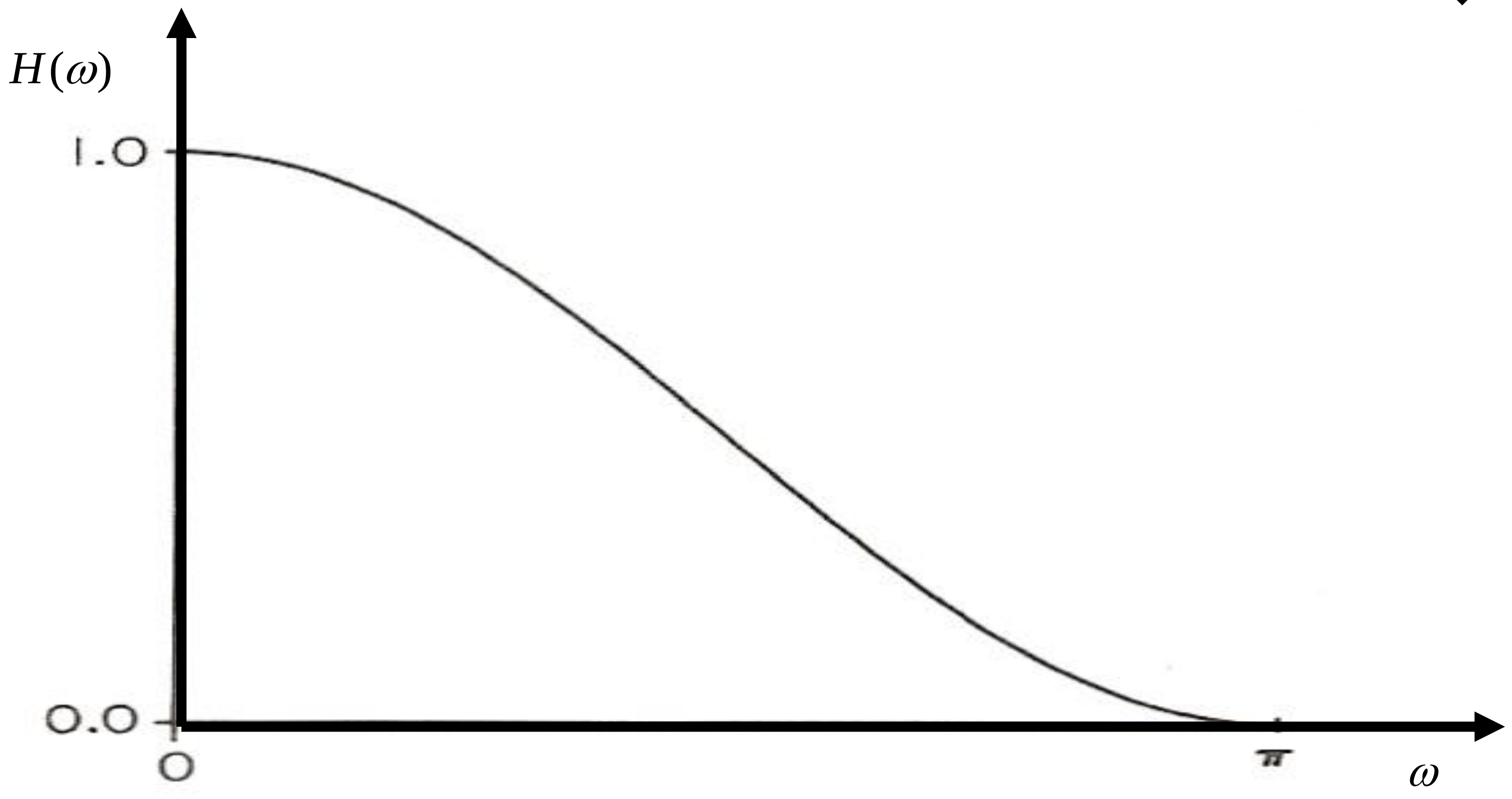
Evaluemos está expresión sobre el círculo unidad:

$$Y(\omega) = \tfrac{1}{3}\left(e^{-i\omega} + 2 + e^{+i\omega}\right)X(\omega) = \tfrac{1}{4}\left(2 + 2\cos(\omega)\right)X(\omega)$$

La función de transferencia de este nuevo filtro está dada por:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\left(\omega\right)$$

Ejemplo 2:



$$H(\omega) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(\omega)$$

Respuesta en frecuencia del operador integración:

$$x_{(t)} = e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{\int \ldots dt} \rightarrow y_{(t)} = \int e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} = \frac{1}{i\omega} x_{(t)}$$

$$H_{exacto}(\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

Es decir que la respuesta en frecuencia del operador exacto de integración introduce un factor de escala inversamente proporcional a la frecuencia y un atraso de la fase de 90°.

Transformada Z de la regla del trapezoide:

La regla del trapezoide se define del siguiente modo:

$$y_n = y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right)$$

Tomamos transformada Z:

$$Y(z) = zY(z) + \tfrac{1}{2}\left(X(z) + zX(z)\right)$$

La función de transferencia es:

$$H_{trapezoide}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Está es la transformada Z del operador de la regla del trapezoide, y como veremos está estrechamente relacionada a lo que se denomina operador bilineal.

Respuesta en frecuencia de la regla del trapezoide:

$$H_{trapezoide}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Evaluamos la transformada Z sobre el círculo unidad $z = e^{-i\omega}$:

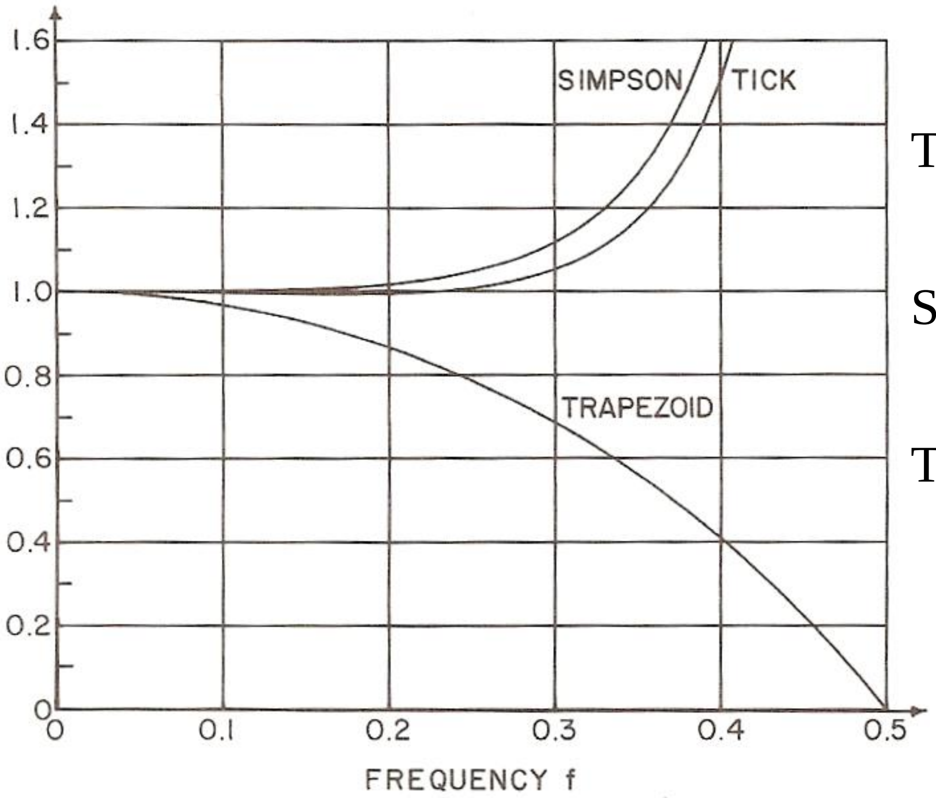
$$H_{trapezoide}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{1-e^{-i\omega}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\frac{\omega}{2}} + e^{-i\frac{\omega}{2}}}{e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}}\right) = \frac{1}{2i}\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

En las bajas frecuencias, cuando $\omega \to 0,\ H(\omega) \to \dfrac{1}{i\omega}$, es decir que la regla del trapezoide es una buena aproximación de baja frecuencia.

Calculemos el cociente entre la respuesta en frecuencia del trapezoide y la respuesta en frecuencia del operador exacto:

$$\frac{H_{trapezoide}(\omega)}{H_{exacto}(\omega)} = \frac{\dfrac{1}{2i}\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\dfrac{1}{i\omega}} = \frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Cocientes de las respuestas en frecuencia de trapecio, Simpson y Tick, con la respuesta exacta:



Trapecio:

$$y_n = y_{n-1} + \tfrac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$$

Simpson:

$$y_n = y_{n-2} + \tfrac{1}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2})$$

Tick:

$$y_n = y_{n-2} + 0.3584x_n + 1.2832x_{n-1} + 0.3584x_{n-2}$$

Respuesta en frecuencia del operador derivación:

$$x_{(t)} = e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow y_{(t)} = \frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} = i\omega x_{(t)}$$

$$H_{exacto}(\omega) = i\omega$$

Es decir que la respuesta en frecuencia del operador exacto de derivación introduce un factor de escala directamente proporcional a la frecuencia y un adelanto de la fase de 90°.

La respuesta en frecuencia del operador exacto de derivación es la inversa de la respuesta en frecuencia del operador exacto de integración.

Diferencias de Primer Orden

Es posible aproximar una derivada en forma discreta utilizando la diferencia central de primer orden:

$$y_n = \tfrac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n-1}) \qquad \text{diferencia central de primer orden}$$

Este operador utiliza dos muestras no consecutivas para aproximar la derivada. Es claro que si utilizamos dos muestras consecutivas, podríamos obtener una mejor aproximación de la derivada. Existen dos posiblidades:

$$y_n = {}^{\mathrm{f}}\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \qquad \text{diferencia de primer orden hacia adelante}$$

$$y_n = {}^{\mathrm{b}}\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \qquad \text{diferencia de primer orden hacia atrás}$$

El problema es que ambas aproximaciones introducen un corrimiento en tiempo de media muestra respecto de la posición correcta de la salida $y_{n+\frac{1}{2}}$ e $y_{n-\frac{1}{2}}$, este corrimiento en tiempo corresponde a un corrimiento lineal de la fase que alcanza los 90° cuando $\omega = \pi$.

Diferencias de Orden Superior

Repetidas aplicaciones de las diferencias de primer orden pueden utilizarse para obtener diferencias de orden superior y aproximar de manera discreta derivadas de orden superior. Por ejemplo:

$$^{\mathrm{f}}\Delta x_n = \Delta x_{n+\frac{1}{2}} = x_{n+1} - x_n$$

$$^{\mathrm{b}}\Delta x_n = \Delta x_{n-\frac{1}{2}} = x_n - x_{n-1}$$

$$\Delta^2 x_n = {}^{\mathrm{f}}\Delta x_n - {}^{\mathrm{b}}\Delta x_n = x_{n+1} - x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$$

$$^{\mathrm{f}}\Delta^3 x_n = \Delta^3 x_{n+\frac{1}{2}} = \Delta^2 x_{n+1} - \Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n - x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1} =$$

$$= x_{n+2} - 3x_{n+1} + 3x_n - x_{n-1}$$

$$^{\mathrm{b}}\Delta^3 x_n = \Delta^3 x_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^2 x_n - \Delta^2 x_{n-1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} - x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

$$= x_{n+1} - 3x_n + 3x_{n-1} - x_{n-2}$$

$$\Delta^3 x_n = \tfrac{1}{2}\left({}^{\mathrm{f}}\Delta^3 x_n + {}^{\mathrm{b}}\Delta^3 x_n\right) = \tfrac{1}{2}\left(x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2}\right)$$

$$\Delta^4 x_n = {}^{\mathrm{f}}\Delta^3 x_n - {}^{\mathrm{b}}\Delta^3 x_n = x_{n+2} - 3x_{n+1} + 3x_n - x_{n-1} - x_{n+1} + 3x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} =$$

$$= x_{n+2} - 4x_{n+1} + 6x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2}$$

Respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante:

$$y_n = {}^{\mathrm{f}}\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

Tomamos transformada Z:

$$Y(z) = \left(z^{-1} - 1\right) X(z)$$

La función de transferencia está dada por:

$$H_{diferencia}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} - 1$$

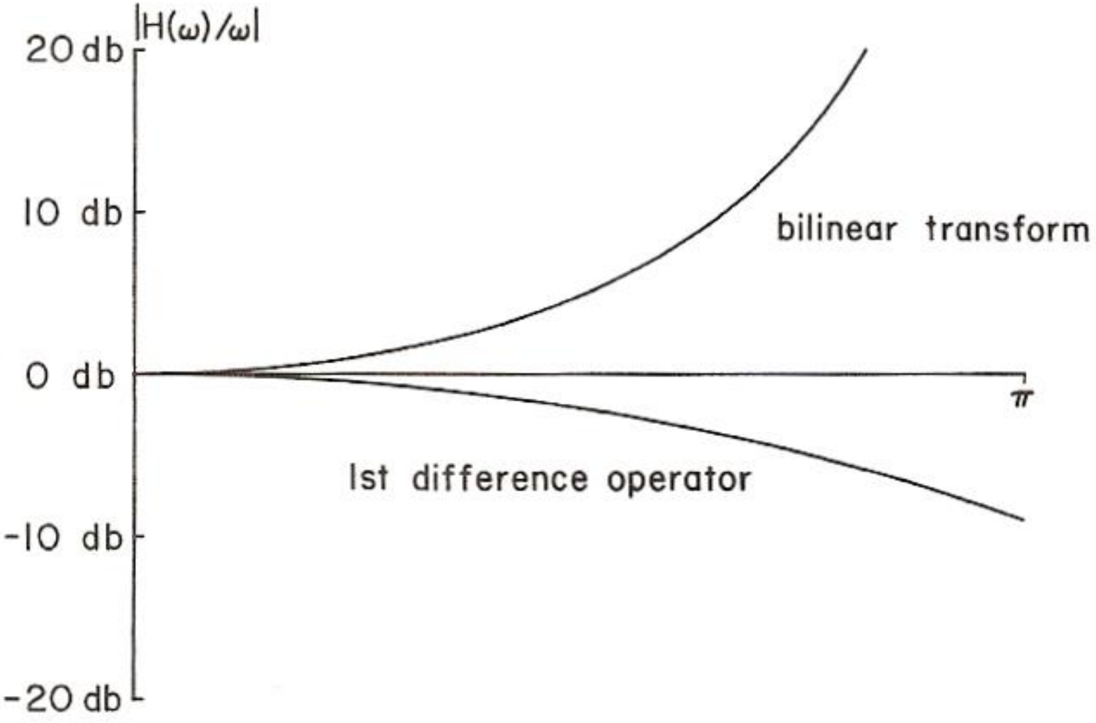
Evaluando sobre el círculo unidad $z = e^{-i\omega}$, obtenemos:

$$H_{diferencia}(\omega) = e^{i\omega} - 1 = i\omega - \tfrac{1}{2}\omega^2 - i\,\tfrac{1}{6}\omega^3 + \cdots$$

El cociente entre la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante y la respuesta en frecuencia del operador exacto es:

$$\frac{H_{diferencia}(\omega)}{H_{exacta}(\omega)} = \frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega} = 1 + i\frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{6} + \cdots$$

Cociente de la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante con la respuesta exacta:



$$dB = -20\log_{10}\left(\frac{H_{diferencia}(\omega)}{H_{exacta}(\omega)}\right)$$

Desarrollo en Serie del Logaritmo

Hagamos uso de la conocida serie geométrica:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad , \quad |z| < 1$$

Integramos ambos miembros:

$$\int \frac{1}{1-z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int z^n dz$$

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

$$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-1)^n}{n}$$

Desarrollo en Serie del Logaritmo

Para obtener una convergencia más rápida del desarrollo en serie del logaritmo hacemos el siguiente cambio de variables:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad , \qquad w = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\ln(z) = \ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 2w\left(1 + \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \frac{1}{7}w^6 + \frac{1}{9}w^8 + \cdots\right)$$

$$\ln(z) = 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \cdots$$

Desarrollo en Serie de la exponencial

$$e^{\omega}=1+\omega+\frac{1}{2!}\omega^{2}+\frac{1}{3!}\omega^{3}+\frac{1}{4!}\omega^{4}+\cdots$$

$$e^{i\omega}=1+i\omega-\frac{1}{2!}\omega^{2}-\frac{i}{3!}\omega^{3}+\frac{1}{4!}\omega^{4}+\cdots$$

$$e^{-i\omega}=1-i\omega-\frac{1}{2!}\omega^{2}+\frac{i}{3!}\omega^{3}+\frac{1}{4!}\omega^{4}+\cdots$$

$$e^{-i\omega}=\frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{e^{i\frac{\omega}{2}}}=\frac{1-i\frac{\omega}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2}+\frac{i}{3!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{3}+\frac{1}{4!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{4}+\cdots}{1+i\frac{\omega}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2}-\frac{i}{3!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{3}+\frac{1}{4!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{4}+\cdots}$$

La Transformación Bilineal

Las operaciones de derivacion e integración están definidas en un dominio continuo. Queremos encontrar un operador que aplicado en el dominio de los tiempos discretos sea equivalente a multiplicar o dividir por $i\omega$ en el dominio de las frecuencias.

La dificultad del problema radica esencialmente en la no simplicidad de la relación que vincula a las variables z y ω, esta relación está definida por:

$$z = e^{-i\omega}$$

$$i\omega = -\ln(z)$$

Ir desde el dominio de los tiempos discretos al dominio de la transformada Z es simple e inmediato. Pero ir desde el dominio de la respuesta en frecuencia al dominio de los tiempos discretos, pasando por el dominio de la transformada Z, es una tarea compleja que requerirá de algún tipo de aproximación.

La Transformación Bilineal

Para encontrar las aproximaciones buscadas, hacemos un desarrollo en serie de la exponencial compleja y truncamos en el segundo término:

$$z = e^{-i\omega} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{e^{+i\frac{\omega}{2}}} = \frac{1 - i\,\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2!}\left(-i\,\frac{\omega}{2}\right)^2 - \cdots}{1 + i\,\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2!}\left(+i\,\frac{\omega}{2}\right)^2 - \cdots} \cong \frac{1 - i\,\frac{\omega}{2}}{1 + i\,\frac{\omega}{2}}$$

Análogamente, hacemos un desarrollo en serie del logaritmo natural y truncamos también en el segundo término:

$$-i\omega = \ln\left(e^{-i\omega}\right) = \ln(z) = 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \cdots \cong 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

La Transformación Bilineal

Estas expresiones aproximadas que vinculan la variable z y la variable ω son conocidas como Transformación Bilineal:

$$\boxed{z = \frac{1 - i\,\frac{\omega}{2}}{1 + i\,\frac{\omega}{2}}} \qquad \boxed{i\omega = 2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}$$

Esta transformación se utiliza para aproximar derivadas e integrales por medio de un desarrollo en serie truncado de las relaciones entre z y ω.

La Transformación Bilineal

Veamos como podemos interpretar la utilización de la Transformación Bilineal para aproximar la derivada:

$$^{b}\Delta x_n = y_{n-\frac{1}{2}} = x_n - x_{n-1}$$

$$y_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1})$$

$$\frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

$$\frac{1}{2}\big(Y(z) + zY(z)\big) = X(z) - zX(z)$$

$$\frac{1}{2}Y(z)(1+z) = X(z)(1-z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2\frac{(1-z)}{(1+z)}$$

La Transformación Bilineal tiene una respuesta en amplitud muy superior a la de las diferencias de primer orden para frecuencias extremadamente bajas y tiene una respuesta en fase exacta para todas las frecuencias a expensas de una paupérrima respuesta en amplitud para las frecuencias más altas.

La TB preserva las propiedades de causalidad, estabilidad y fase mínima

Se puede demostrar que si un sistema analógico es causal y estable, el sistema discreto que se obtiene aplicando la Transformación Bilineal también será causal y estable.

Asimismo, si el sistema analógico original es de fase mínima, la Transformación Bilineal preservará dicha propiedad, de tal forma que el sistema discreto obtenido también será de fase mínima.

Una ecuación diferencial estable, convertida en una ecuación de diferencias utilizando la Transformación Bilineal, también tendrá una solución discreta estable. Esto no siempre es así cuando la ecuación se discretiza utilizando diferencias hacia adelante o hacia atrás.

La TB preserva las propiedades de causalidad, estabilidad y fase mínima

Si suponemos que la frecuencia puede tomar valores complejos, estaríamos evaluando la transformada Z no solamente sobre el círculo unidad sino sobre cualquier punto del plano complejo:

$$z = e^{-i\omega} = e^{-i[Re(\omega)+iIm(\omega)]} = e^{Im(\omega)}e^{-iRe(\omega)}$$

Esta relación mapea el exterior del círculo unidad del plano Z en la mitad superior del plano ω . Mientras que el interior del círculo unidad del plano Z es mapeado en la mitad inferior del plano ω. Observando la definición de la transformación bilineal, puede verse que el mapeo que efectúa entre los planos Z y ω, tiene las mismas características. Este hecho extremadamente fortuito tiene como implicancia que la condición de fase mínima es preservada por la transformación bilineal. Por ejemplo, que una ecuación diferencial estable, convertida en una ecuación de diferencias utilizando la transformación bilineal, también tendrá una solución digital estable. Esto no siempre es así cuando se utilizan diferencias hacia adelante o hacia atrás.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Three.