Análisis de Señales en Geofísica

2° Clase

Transformada Z

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Transformada Z

<u>Definición:</u>

Dada una secuencia $x_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ de longitud N definimos a su transformada Z como el polinomio en z de grado $N-1$:

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_{N-1} z^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$$

Indicaremos de las siguientes maneras que $X(z)$ es la transformada Z de x_n:

$$x_n \Leftrightarrow X(z)$$

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\}$$

Operador de retardo unitario Z

La variable compleja z se puede interpretar como un operador que introduce un retardo unitario:

$$x_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \Leftrightarrow X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_{N-1} z^{N-1}$$

$$x_{n-1} = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \Leftrightarrow zX(z) = x_0 z + x_1 z^2 + x_2 z^3 + \ldots + x_{N-1} z^N$$

$$x_{n+1} = (x_0, \underset{\uparrow}{x_1}, x_2, \ldots, x_{N-1}) \Leftrightarrow z^{-1} X(z) = x_0 z^{-1} + x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots + x_{N-1} z^{N-2}$$

En general:

$$x_{n-k} \Leftrightarrow z^k X(z)$$

Teorema de Convolución

Dadas dos secuencias a_n y b_n y sus transformadas Z $A(z)$ y $B(z)$, el producto de las transformadas Z es igual a la transformada Z del producto de convolución entre las mismas secuencias, es decir:

$$A(z)B(z) = \mathbf{Z}\left\{a_n * b_n\right\}$$

Esto mismo lo podemos expresar de la siguiente manera, convolucionar dos secuencias en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicarlas en el dominio de las transformada Z:

$$a_n * b_n \Leftrightarrow A(z)B(z)$$

Teorema de Convolución

<u>Demostración:</u>

Sea:

$$c_n = a_n * b_n \Leftrightarrow C(z) = \sum_n c_n z^n$$

Cuando multiplicamos dos polinomios multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por todos los términos del otro y sumamos los productos que tienen la misma potencia de z, esto es lo mismo que hacemos cuando convolucionamos:

$$c_n z^n = \sum_k a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_k a_k b_{n-k} z^n$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$$

Si N y M son las longitudes de a_n y de b_n respectivamente, es fácil de ver que la longitud de c_n será igual a $N + M - 1$.

Diagrama de Convolución

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
\hline
a_0 & a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & a_0b_4 \\
a_1 & a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\
a_2 & a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4
\end{array}
$$

$$c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$$

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2$$

$$c_5 = a_1 b_4 + a_2 b_3$$

$$c_6 = a_2 b_4$$

Sistemas en Cascada

Dados dos SLI con respuestas impulsivas f_n y g_n, coloquémoslos en cascada del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} x_n \\ X(z) \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} f_n \\ F(z) \end{array}} \xrightarrow{x_n * f_n} \underset{X(z)F(z)}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{c} g_n \\ G(z) \end{array}} \rightarrow \begin{array}{c} y_n = x_n * f_n * g_n \\ Y(z) = X(z)F(z)G(z) \end{array}$$

Estos sistemas en cascada serán equivalentes a un único sistema con respuesta impulsiva $h_n = f_n * g_n$ y transformada Z H(z)=F(z)G(z):

$$\begin{array}{c} x_n \\ X(z) \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} h_n = f_n * g_n \\ H(z) = F(z)G(z) \end{array}} \rightarrow \begin{array}{c} y_n = x_n * h_n \\ Y(z) = X(z)H(z) \end{array}$$

Factorización de la TZ

Dado un SLI con respuesta finita h_n de longitud N, el teorema fundamental del álgebra nos dice que la transformada Z de h_n, un polinomio en z de grado $N-1$, posee $N-1$ raíces o ceros α_n y puede ser factorizado en $N-1$ factores:

$$H(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots + h_{N-1} z^{N-1} = h_{N-1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{N-1})$$

Esto mismo expresado en el dominio del tiempo queda:

$$h_n = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{N-1}) = h_{N-1}(-\alpha_1, 1) * (-\alpha_2, 1) * (-\alpha_3, 1) * \ldots * (-\alpha_{N-1}, 1)$$

Factorización de la TZ

Utilizando diagramas en bloque tenemos:

$$x_n \to \boxed{h_n} \to y_n$$

Este sistema es equivalente a $N-1$ sistemas de respuesta impulsiva de longitud 2 colocados en cascada:

$$x_n \xrightarrow{h_{N-1}} \boxed{(-\alpha_1,1)} \to \boxed{(-\alpha_2,1)} \to \boxed{(-\alpha_3,1)} \to \cdots \to \boxed{(-\alpha_{N-1},1)} \to y_n$$

Es decir que podemos descomponer el sistema con una respuesta impulsiva de longitud N en $N-1$ sistemas con respuesta impulsivas de longitud 2 más un factor de escala.

Los sistemas con respuesta impulsiva de longitud 2 son llamados cuplas o dipolos.

Factorización de la TZ

Otra forma de factorizar $H(z)$ es la siguiente:

$$H(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots + h_{N-1} Z^{N-1} = h_0 \left(1 - \frac{z}{\alpha_0}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{\alpha_{N-1}}\right)$$

Esto mismo expresado en el dominio del tiempo queda:

$$h_n = (h_0, h_1, h_2, \cdots, h_{N-1}) = h_0 \left(1, \frac{-1}{\alpha_0}\right) * \left(1, \frac{-1}{\alpha_1}\right) * \left(1, \frac{-1}{\alpha_2}\right) * \left(1, \frac{-1}{\alpha_3}\right) * \cdots * \left(1, \frac{-1}{\alpha_{N-1}}\right)$$

Esta forma de factorizar difiere de la anterior en el valor del factor de escala.
Esto que hemos realizado para respuestas impulsivas podría también efectuarse para señales finitas. Por lo general, tanto las señales como las respuestas impulsivas toman valores reales, por lo tanto las raíces de sus transformadas Z o bien serán reales o se presentaran de a pares complejos conjugados.

Operadores Inversos

En general nos referiremos a las respuesta impulsivas como operadores.

Dado un operador h_n, diremos que h_n^{-1} es su operador inverso si solo si:

$$h_n * h_n^{-1} = \delta_n$$

Aplicando transformada Z, obtenemos:

$$H(z)H^{-1}(z) = 1$$

Es decir que la transformada Z del operador inverso es simplemente:

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Dado que cualquier secuencia de longitud N puede ser descompuesta en la convolución de $N-1$ dipolos, comenzaremos estudiando el operador inverso de una cupla o dipolo para luego generalizar nuestras conclusiones.

Operador Inverso de un Dipolo

Consideremos la siguiente transformada Z de una cupla o dipolo:

$$H(z) = 1 - kz \qquad \text{donde } k = \frac{1}{\alpha}$$

La transformada Z del operador inverso está dada por:

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1-kz}$$

Para comprender el significado de este operador inverso consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} x_n \\ X(z) \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} h_n^{-1} \\ \dfrac{1}{1-kz} \end{array}} \rightarrow \begin{array}{l} y_n = h_n^{-1} * x_n \\ Y(z) = \dfrac{1}{1-kz} X(z) \end{array}$$

Operador Inverso de un Dipolo

$$y_n = h_n^{-1} * x_n$$

Tomamos transformada Z:

$$Y(z) = H^{-1}(z)X(z) = \frac{1}{1-kz}X(z)$$

$$Y(z)(1-kz) = X(z)$$

$$Y(z) - kzY(z) = X(z)$$

Ahora tomemos transformada Z inversa:

$$y_n - ky_{n-1} = x_n$$

$$\boxed{y_n = x_n + ky_{n-1}}$$

Es decir que el operador inverso de un dipolo puede verse como un sistema autorregresivo de primer orden AR(1).

Operador Inverso de un Dipolo

Una forma de encontrar el operador MA equivalente a este operador AR(1), es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
y_n &= x_n + k y_{n-1} \\
y_{n-1} &= x_{n-1} + k y_{n-2} \\
y_{n-2} &= x_{n-2} + k y_{n-3} \\
y_{n-3} &= x_{n-3} + k y_{n-4} \\
y_{n-4} &= x_{n-4} + k y_{n-5} \\
y_{n-5} &= x_{n-5} + k y_{n-6} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Reemplazando en cada una de estas ecuaciones, la salida anterior realimentada en la entrada, por la salida de la ecuación siguiente, obtenemos:

$$y_n = x_n + k\left(x_{n-1} + k\left(x_{n-2} + k\left(x_{n-3} + k\left(x_{n-4} + k\left(x_{n-5} + k y_{n-6}\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$y_n = x_n + k x_{n-1} + k^2 x_{n-2} + k^3 x_{n-3} + k^4 x_{n-4} + k^5 x_{n-5} + k^6 x_{n-6} + \cdots$$

$$y_n = \sum_{j=0}^{\infty} k^j x_{n-j} = x_n * (1, k, k^2, k^3, k^4, k^5, k^6, k^7, \ldots) = x_n * h_n^{-1}$$

$$h_n^{-1} = (1, k, k^2, k^3, k^4, k^5, k^6, k^7, \ldots)$$

Operador Inverso de un Dipolo

Otra manera de encontrar el operador MA equivalente al operador AR(1), es utilizando la serie geométrica para desarrollar en potencias de z la transformada Z del operador inverso:

$$H^{-1}(z)=\frac{1}{1-kz}=\sum_{n=0}^{\infty}(kz)^n=1+kz+k^2z^2+k^3z^3+k^4z^4+\cdots$$

Esta serie es absolutamente convergente si $|kz|<1$, pero si evaluamos la transformada Z sobre el círculo unidad $|z|=1$, será convergente si $|k|<1$, o lo que es equivalente si $|\alpha|>1$.

Tomando transformada Z inversa a la serie geométrica obtenemos el operador inverso de la cupla o dipolo en el dominio del tiempo:

$$h_n^{-1}=(1\ ,k\ \ ,k^2,k^3,k^4,k^5,\ldots)$$

El precio pagado por evitar la realimentación recursiva del operador AR(1) es la utilización de un operador MA de longitud infinita.

Operador Inverso de un Dipolo

Convergencia:

La condición de convergencia del operador inverso, infinito y causal puede ser vista de tres maneras equivalentes:

1- El módulo de k debe ser menor que uno:

$$|k| < 1 \qquad \text{donde } h_n = (1, -k)$$

2- El módulo del primer elemento de la cupla debe ser mayor que el módulo del segundo elemento:

$$|h_0| > |h_1| \qquad \text{donde } h_n = (h_0, h_1), \qquad \alpha = -\frac{h_0}{h_1}$$

3- La transformada Z de la cupla o dipolo tiene su cero o raíz fuera del círculo unidad:

$$|\alpha| > 1 \qquad \text{donde } \alpha = \frac{1}{k} = -\frac{h_0}{h_1}$$

Dipolo de Fase Mínima

Definición:

Llamaremos cupla o dipolo de fase mínima o de mínimo retardo a aquella cupla o dipolo cuya transformada Z tiene su cero fuera del círculo unidad.

Como hemos visto las cuplas o dipolos de fase mínima admiten inversas causales y estables. Si la cupla no es de fase mínima la inversa causal no es estable.

Por el contrario llamaremos cupla o dipolo de fase máxima o de máximo retardo a aquella cuya transformada Z tiene su cero dentro del círculo unidad.

Una cupla que tenga su cero sobre el círculo unidad no es de fase mínima ni de fase máxima y veremos más adelante cuales son las consecuencias de ello.

Inversa de un Dipolo de Fase Máxima

Cuando el dipolo es de fase máxima tendremos que $|k|>1,$ por lo tanto la inversa causal no es estable. Sin embargo podemos encontrar una inversa anticausal que sí sea estable:

$$H^{-1}(z)=\frac{1}{1-kz}=\frac{-1}{kz}\left[\frac{1}{1-\dfrac{1}{kz}}\right] \qquad , \qquad |k|>1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{k}\right|=|\alpha|<1$$

$$H^{-1}(z)=\frac{-1}{kz}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{kz}\right)^{n}=\frac{-1}{kz}\left[1+k^{-1}z^{-1}+k^{-2}z^{-2}+k^{-3}z^{-3}+k^{-4}z^{-4}+\right]$$

Tomamos transformada Z inversa:

$$h_n^{-1}=(\ldots,-k^{-5},-k^{-4},-k^{-3},-k^{-2},-k^{-1},\underset{\uparrow}{0})$$

Para lograr que el operador inverso del dipolo de fase máxima sea estable hemos tenido que hacerlo anticausal, es decir, que la salida actual dependa de los infinitos valores futuros que se presenten en la entrada, por lo cual es físicamente no-realizable.

Generalización

Definiciones:

Diremos que una secuencia finita es de fase mínima o de mínimo retardo si su transformada Z tiene todos sus ceros fuera del círculo unidad. Por el contrario, diremos que es de fase máxima o de máximo retardo si su transformada Z tiene todos sus ceros dentro del círculo unidad.
Si tiene ceros tanto dentro como fuera del círculo unidad diremos que es de fase mixta.

Una secuencia de fase mínima de longitud N se puede descomponer en la convolución de $N-1$ dipolos de fase mínima, y su inversa se puede descomponer en la convolución de $N-1$ secuencias causales y estables, por lo tanto su inversa estable será causal:

$$h_n = (1,-k_1)*(1,-k_2)*(1,-k_3)*\cdots*(1,-k_{N-1})$$

$$h_n^{-1} = (1,k_1,k_1^2,k_1^3,\ldots)*(1,k_2,k_2^2,k_2^3,\ldots)*\ldots*(1,k_{N-1},k_{N-1}^2,k_{N-1}^3,\ldots)$$

Análogamente si la secuencia de longitud N es de fase máxima su inversa estable será anticausal. Mientras que si la secuencia es de fase mixta su inversa estable tendrá componentes tanto causales como anticausales, es decir su salida actual dependerá tanto de las entradas pasadas como futuras.

Fracción Racional de Polinomios

La forma más general de expresar la transformada Z de un sistema ARMA(M,N) es mediante la división de dos polinomios $S(z)=\dfrac{A(z)}{B(z)}$, la cual puede ser factorizada de la siguiente manera:

$$S(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_N)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-\beta_3)(z-\beta_M)}$$

El numerador es siempre causal mientras que el denominador por lo general será de fase mixta y para asegurarnos estabilidad tendremos que expandirlo en infinitos términos en el pasado y en el futuro, luego multiplicar por el numerador y finalmente aplicar la transformada Z inversa para obtener la respuesta impulsiva estable del sistema.

Fracción Racional de Polinomios

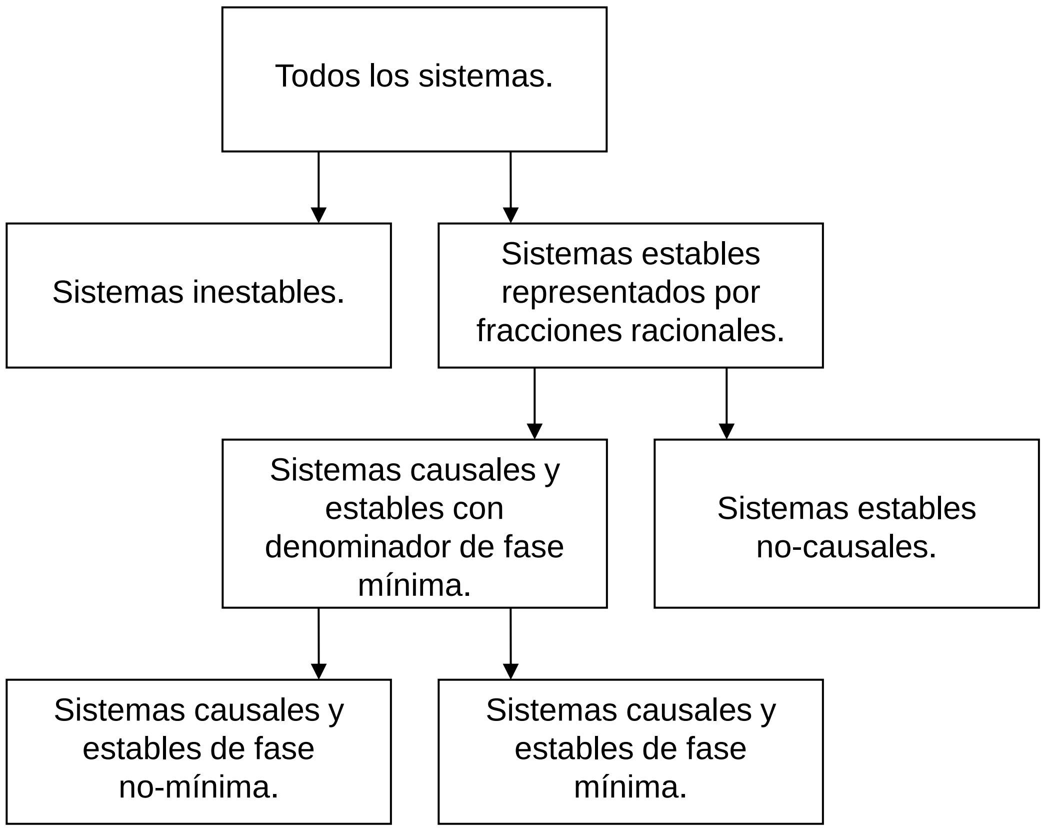
Si el denominador $B(z)$ es de fase mínima, es decir los polos de $S(z)$ están fuera del círculo unidad, la respuesta impulsiva es causal y estable.

Si tanto los polos como los ceros de $S(z)$ están fuera del círculo unidad la respuesta impulsiva será causal estable y de fase mínima, ya que la inversa de una secuencia de fase mínima es de fase mínima y el producto de dos secuencias de fase mínima es de fase mínima.

Que una secuencia sea causal y estable no implica que sea de fase mínima.

Solamente son de fase mínima aquellos sistemas que tienen tanto sus ceros como sus polos fuera del círculo unidad.

Clasificación de Sistemas



Sistemas Físicos Reversibles

La principal importancia de los sistemas de fase mínima es su relación con los sistemas físicos que son reversibles. Para que un sistema físico sea reversible no alcanza con que sea causal y estable, tiene que ser también de fase mínima. Esto se debe a que si el sistema es reversible, tiene que tener una inversa causal y estable, lo cual solo es posible cuando el sistema es de fase mínima. Es decir, existen consideraciones físicas por las cuales algunos sistemas deben ser de fase mínima.

Sistemas Físicos Reversibles

Un hecho sumamente desafortunado y de profunda importancia en análisis de señales, es el que los sistemas analógicos de fase mínima no siempre preservan esta condición cuando los discretizamos.

La condición de fase mínima está ligada a la estabilidad numérica de los distintos esquemas computacionales que podemos implementar para resolver un problema de deconvolución o de ecuaciones de diferencias, por lo cual tiene un papel de central importancia en el procesamiento de señales digitales.

La transformada Z, mediante una simple expansión en serie geométrica, nos ha permitido convertir la acción recursiva o auto-regresiva de la inversa de una cupla, en un operador equivalente de promedio móvil de longitud infinita. Como consecuencia esta expansión nos permite relacionar la condición de fase mínima con un aspecto físico central como es la causalidad.

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter Two.