Análisis de Señales en Geofísica

1° Clase

Señales y Sistemas

Prof. Ricardo C. Rebollo

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Señales

Definición:

Llamaremos señal a cualquier observable que en su variación espacial, temporal o respecto de cualquier otra cantidad, sea capaz de contener o transportar información.

En general en este curso, consideraremos que las señales varían respecto de una única variable independiente y que esa variable independiente es genéricamente el tiempo.

Señales

Clasificación:

- Analógicas: definidas en un dominio continuo.
- Discretas: definidas en instantes regularmente dispuestos.
- Digitales: discretas con amplitudes cuantizadas.

Señales

Clasificación por su naturaleza estadística:

- Determinísticas: es posible predecirlas a partir de valores pasados.

  Ejemplo: $$U_t = \sin(\Omega t)$$

  $$U_{t+2\Delta t} = aU_{t+\Delta t} - U_t$$

  $$a = 2\cos(\Omega \Delta t)$$

- Innovativas, aleatorias o estocásticas: no es posible predecir sus valores futuros.

  Ejemplo: La bolsa de valores.

Conversor Analógico/Digital

Definición:

El conversor A/D es un dispositivo electrónico que nos permite digitalizar señales analógicas.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\text{A/D}} \longrightarrow X(n\Delta t) = X_n$$

Frecuentemente las señales digitales provienen del muestreo o digitalización de señales analógicas. El intervalo de muestreo Δt puede variar ampliamente, desde una muestra por día o menos, hasta más de diez millones de muestras por segundo.

Muestreo y *Aliasing*

Consideremos una familia de exponenciales complejas:

$$f_{(t)}^{\Omega} = e^{i\Omega t} = \cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)$$

Discreticémosla tomando muestras equidistantes:

$$f_{(n\Delta t)}^{\Omega} = f_n^{\Omega} = e^{i\Omega n \Delta t}$$

Muestreo y *Aliasing*

Veamos qué sucede con las señales discretizadas cuando comparamos diferentes miembros de la familia con distintos valores de frecuencias que difieren en múltiplos de:

$$\frac{2\pi}{\Delta t}m \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Podemos ver que al discretizar estos miembros diferentes toman los mismos valores:

$$f_n^{\Omega \pm \frac{2\pi}{\Delta t}m} = e^{i\left(\Omega \pm \frac{2\pi}{\Delta t}m\right)n\Delta t} = e^{\pm i\frac{2\pi}{\Delta t}mn\Delta t} e^{i\Omega n\Delta t} = e^{i\Omega n\Delta t} = f_n^{\Omega}$$

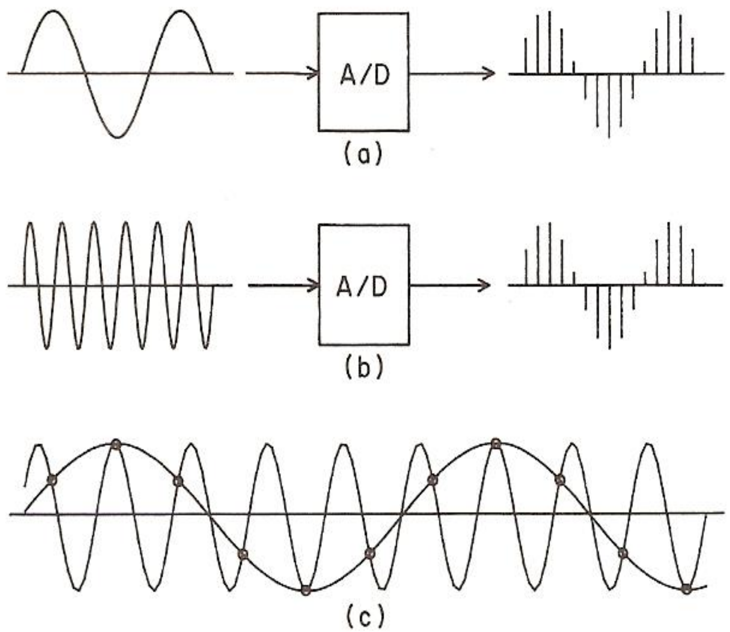
Aliasing

Cualquier señal arbitraria puede ser sintetizada como la suma de exponenciales complejas, es decir que las conclusiones a las que lleguemos para exponenciales complejas también serán válidas para cualquier señal arbitraria.

La frecuencia de una señal discretizada se corresponderá con la frecuencia de la señal analógica que le dio origen, hasta la frecuencia $\pm\frac{\pi}{\Delta t}$, a partir de esta frecuencia la señal discretizada tendrá el aspecto de una señal de frecuencia mucho más baja que la frecuencia de la señal analógica original.

Esta energía de baja frecuencia aparente presente en la señal discretizada, que no se encuentra en la señal original, es un alias de la alta frecuencia sí presente en la señal analógica. Este fenómeno es conocido con el nombre de *aliasing*.

Aliasing



En la figura (a) podemos ver la señal de frecuencia Ω, en la figura (b) podemos ver la señal de frecuencia $\Omega + \frac{2\pi}{\Delta t}$m, y en la figura (c) podemos ver las funciones analógicas (a) y (b) superpuestas, con las posiciones de las muestras tomadas indicadas.

Frecuencia de Muestreo

Definición:

Se denomina frecuencia de muestreo (sampling) a la cantidad de muestras que tomamos por unidad de tiempo, es decir:

$$f_S = \frac{1}{\Delta t}$$

La frecuencia angular de muestreo estará dada por:

$$\Omega_S = 2\pi f_S = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

La frecuencia angular digital de muestreo estará dada por:

$$\omega_S = \Omega_S \times \Delta t = 2\pi$$

Frecuencia de Nyquist

<u>Definición:</u>

Se define a la frecuencia de Nyquist como:

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t}$$

La frecuencia angular de Nyquist estará dada por:

$$\Omega_N = 2\pi f_N = \frac{\pi}{\Delta t}$$

La frecuencia angular digital de Nyquist estará dada por:

$$\omega_N = \Omega_N \times \Delta t = \pi$$

Esta frecuencia de Nyquist es de fundamental importancia, ya que nos dice cual es la frecuencia máxima que puede estar presente en la señal analógica sin que se produzca aliasing en la señal discretizada.

Sistemas

Definición:

Un sistema es cualquier entidad capaz de generar, medir o modificar una señal.

Los sistemas pueden ser clasificados como analógicos, digitales, determinísticos o innovativos según generen, midan o modifiquen señales analógicas, digitales, determinísticas o innovativas.

Sistemas

Propiedades:

Existen cinco propiedades de los sistemas que son de particular importancia para nuestro estudio:

- Linealidad
- Invarianza
- Estabilidad
- Causalidad
- Invertibilidad

Las últimas tres propiedades también pueden ser aplicadas a señales.

Linealidad

Es la propiedad de un sistema que nos permite decir que el efecto de la suma escalada de las causas es igual a la suma escalada de los efectos individuales.

Para verlo con más claridad consideremos el siguiente sistema:

$$x_n \rightarrow \boxed{S\left\{x_n\right\}} \rightarrow y_n = S\left\{x_n\right\}$$

La operación que aplica el sistema sobre la señal de entrada para generar la señal de salida está definida por el operador S{ }.

Linealidad

Dadas las señales a_n y b_n y los escalares α y β,
definimos las siguientes operaciones:

$$\alpha a_n = \alpha(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$$

$$a_n + b_n = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$

Ahora podemos expresar matemáticamente el concepto de linealidad del siguiente modo:

$$S\left\{\alpha a_n + \beta b_n\right\} = \alpha S\left\{a_n\right\} + \beta S\left\{b_n\right\}$$

La propiedad de linealidad expresada por esta ecuación involucra a su vez las propiedades de superposición y la de proporcionalidad.

Linealidad

Se define a la secuencia impulso unitario δ_n como:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

A lo largo de este curso nos referiremos indistintamente a secuencias como a señales digitales.

Podemos descomponer una señal x_n como una suma escalada de impulsos unitarios retardados, es decir:

$$x_n = \sum_k x_k \delta_{n-k}$$

Cuando no le ponemos límites a las sumatorias o a las integrales significa que se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Linealidad

Apliquemos a la descomposición anterior el operador $S\{\ \}$, tenemos:

$$y_n = S\{x_n\} = S\left\{\sum_k x_k \delta_{n-k}\right\}$$

Aplicando la propiedad de superposición de los sistemas lineales:

$$y_n = \sum_k S\{x_k \delta_{n-k}\}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad, obtenemos:

$$y_n = \sum_k x_k S\{\delta_{n-k}\}$$

Vemos que $S\{\delta_{n-k}\}$ es la respuesta del sistema lineal cuando se lo excita con un impulso unitario retardado.

Invarianza Temporal

La propiedad de invarianza temporal de los sistemas, implica que la respuesta del sistema a un impulso unitario retardado es igual a la respuesta retardada de un impulso unitario no retardado. Es decir que ante una misma excitación retardada el sistema nos dará la misma respuesta pero retardada.

Si $h_n = S\left\{\delta_n\right\}$ es la respuesta impulsiva del sistema, entonces si el sistema es invariante, se verifica que:

$$h_{n-k} = S\left\{\delta_{n-k}\right\}$$

Producto de Convolución

Combinando las propiedades de linealidad e invarianza temporal obtenemos finalmente:

$$y_n = \sum_k x_k S\left\{\delta_{n-k}\right\} = \sum_k x_k h_{n-k}$$

Esta ecuación define lo que se conoce como producto de convolución y simbólicamente se escribe así:

$$y_n = x_n * h_n$$

Un sistema lineal e invariante queda perfectamente definido por su respuesta impulsiva. La operación que vincula la salida con la entrada del sistema es el producto de convolución de la entrada por la respuesta impulsiva del sistema.

Estabilidad

Se dice que un sistema digital es estable si y solo si su respuesta impulsiva es absolutamente sumable:

$$\sum_{n} |h_n| < \infty$$

Causalidad

Es la propiedad de aquellos sistemas que no nos entregan una señal en la salida antes de ser excitados en su entrada.

Esto implica que su respuesta impulsiva debe ser:

$$h_n = 0 \quad \text{para todo} \quad n < 0$$

Invertibilidad

Un sistema es invertible si es posible expresar la entrada en función de la salida:

$$x_n = S^{-1}\{y_n\}$$

Si el sistema invertible es lineal e invariante, podemos expresarlo de esta manera:

$$x_n = h_n^{-1} * y_n = h_n^{-1} * h_n * x_n$$

Es decir que el sistema lineal e invariante será invertible, si existe la respuesta impulsiva del sistema inverso h_n^{-1}, la cual deberá cumplir:

$$h_n^{-1} * h_n = \delta_n$$

Sistemas MA, AR y ARMA

La forma más general de vincular la entrada y la salida de los sistemas lineales e invariantes (SLI) es por medio del producto de convolución con la respuesta impulsiva del sistema, sin embargo no es la única manera de hacerlo. Existen otras formas de establecer este vínculo como por ejemplo mediante la retroalimentación o feedback. Un sistema retroalimentado o recursivo es aquel en el cual la salida se realimenta en la entrada del sistema.

Según este criterio de retroalimentación es posible clasificar a los sistemas lineales e invariantes en: moving average o promedio móvil (MA), autoregressive o autorregresivos (AR) y en autoregressive-moving average o autorregresivo-promedio móvil (ARMA).

Sistema Moving Average (MA)

En estos sistemas no hay retroalimentación, las muestras de salida se obtienen como una suma escalada o promedio pesado de ciertas muestras de entrada, es decir:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_N x_{n-N} = \sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k}$$

En este caso tenemos un sistema moving average de orden N y lo indicaremos de esta forma MA(N).

Sistema Autoregressive (AR)

En estos sistemas cada muestra de salida se obtiene como una suma escalada de la muestra actual de entrada y de ciertas muestras de salida pasadas, es decir:

$$y_n = x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3} + \ldots + b_M y_{n-M} = x_n + \sum_{k=1}^{M} b_k y_{n-k}$$

En este caso tenemos un sistema autoregressive de orden M y lo indicaremos de esta forma AR(M).

Sistema ARMA

En los sistemas autoregressive-moving average cada muestra de salida se obtiene como una suma escalada de ciertas muestras de entrada y de ciertas muestras de salida pasadas, es decir:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_N x_{n-N} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \ldots + b_M y_{n-M}$$

$$y_n = \sum_{j=0}^{N} a_j x_{n-j} + \sum_{k=1}^{M} b_k y_{n-k}$$

En este caso tenemos un sistema autoregressive-moving average de orden M,N y lo indicaremos de esta forma ARMA(M,N).

Bibliografía:

- Karl, John H. (1989), An introduction to Digital Signal Processing, Academic Press, Chapter One.