

Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clases 12 y 13

Procesos Aleatorio y Estimación del Espectro de Potencia

1. ¿Qué es un proceso aleatorio?

Un proceso aleatorio es una secuencia indexada de variables aleatorias. En el contexto de análisis de señales, los procesos aleatorios, son un concepto matemáticamente conveniente que nos permite utilizar la teoría de probabilidades para representar señales de energía infinita. Cuando modelamos una señal como un proceso aleatorio, los datos observados son considerados una realización de dicho proceso.

Lo que generalmente sucede es que el proceso físico que genera la señal es complejo, y nuestro entendimiento del mismo es tan pobre que se nos presenta en apariencia como aleatorio. Esto no significa que el proceso sea realmente aleatorio, sólo significa que somos ignorantes. En esta situación, lo único que podemos hacer es darle una solución probabilística al problema. Nuestra hipótesis podrá estar en conflicto con la realidad.

2. ¿Cuándo consideramos que un proceso aleatorio es estacionario?

Los procesos aleatorios pueden ser caracterizados por el valor medio, la varianza y los momentos de orden superior. Diremos que un proceso es estrictamente estacionario cuando todos los momentos, cualquiera sea su orden, no varían con el tiempo.

Diremos que un proceso es estacionario débil o estacionario de segundo orden, cuando solamente el valor medio y la varianza no varían con el tiempo.

3. ¿Qué sucede con la autocovarianza de un proceso aleatorio estacionario?

La autocovarianza de un proceso aleatorio, nos da información sobre la dependencia entre dos muestras cualesquiera del proceso. Es una medida de la variabilidad temporal de la señal. Si el proceso es estacionario de segundo orden, la autocovarianza es invariante ante un corrimiento del origen de los tiempos. En consecuencia, sólo dependerá de la posición relativa de las muestras, es decir, sólo dependerá de la longitud del intervalo de tiempo que las separa.

4. ¿Cuándo diremos que un proceso aleatorio estacionario es ergódico?

Diremos que un proceso aleatorio estacionario es ergódico cuando los promedios estadísticos son iguales a los promedios temporales. Sin embargo, para calcular los promedios temporales debemos disponer de una realización del proceso entre $-\infty$ y $+\infty$. Como sólo disponemos de valores del proceso en una ventana de observación de longitud finita, sólo podremos calcular un estimador del promedio estadístico conocido como promedio de la muestra o estimador experimental.

5. ¿Qué dice el teorema de Wiener-Kintchine?

El teorema de Wiener-Kintchine nos dice que para señales de energía infinita, no existe la transformada de Fourier de la autocorrelación, es decir, no existe el espectro de potencia.

Sin embargo, nos dice además que sí existe la transformada de Fourier de la autocovarianza. La transformada de Fourier de la autocovarianza es igual a la densidad del espectro de

potencia.

6. ¿Qué dice el teorema de descomposición de Wold?

El teorema de descomposición de Wold nos dice que una serie de tiempo estacionaria, puede ser expresada como la suma de dos componentes, una componente determinística más una componente aleatoria, donde ambas componentes son ortogonales entre sí.

Además la componente aleatoria estacionaria, se puede modelar como ruido blanco no correlacionable, excitando a un sistema lineal e invariante.

En el caso del modelo de la traza sísmica, la componente determinística es nula, y la componente aleatoria estacionaria es igual al producto de convolución entre la reflectividad y la ondícula o firma de la fuente.

7. ¿Cuáles son los tres modelos básicos para representar un proceso aleatorio estacionario?

Sabemos, por el teorema de descomposición de Wold, que un proceso aleatorio estacionario se puede representar como ruido blanco no correlacionable excitando un sistema lineal e invariante. Este sistema puede ser descripto de diferentes maneras, pero existen tres formas de representarlo que resultan de particular interés:

- Proceso promedio móvil (MA): la salida actual del sistema es igual a la entrada actual escalada, más una suma escalada de entradas pasadas.
- Proceso autoregresivo (AR): la salida actual del sistema es igual a la entrada actual escalada, más una suma escalada de salidas pasadas.
- Proceso ARMA: la salida actual del sistema es igual a la entrada actual escalada, más una suma escalada de entradas pasadas, más una suma escalada de salidas pasadas.

8. ¿Qué es el peridiograma?

El peridiograma es el estimador de la densidad del espectro de potencia que se obtiene tomándole la transformada de Fourier al estimador de la autocovarianza que se obtiene a partir del promedio de la muestra.

9. ¿Cuál es el problema de estimar la densidad del espectro de potencia mediante el peridiograma?

A primera vista, parecería posible que un estimador razonable de la densidad del espectro de potencia del proceso aleatorio estacionario, pudiera obtenerse calculando la transformada de Fourier del estimador de la autocovarianza, y que la calidad de este estimador mejorará a medida que aumente la longitud N de la muestra. Sin embargo, esto no es así, el estimador de la densidad del espectro de potencia conocido como peridiograma, es un estimador no consistente de la densidad del espectro de potencia, por más que N aumente, la desviación media estándar del estimador tenderá a un valor constante tan grande como el valor mismo que estamos tratando de estimar. Aumentar la longitud de la ventana de observación, mejorará la resolución espectral pero no mejorará la resolución estadística.

10. ¿Cómo es posible aumentar la resolución estadística del peridiograma a expensas de la resolución en frecuencias?

Dado una secuencia aleatoria de longitud N , una forma de aumentar la resolución estadística es dividiendo la secuencia en M subsecuencias de longitud N/M , calcular el peridiograma de cada una de ellas y promediarlos. Esta es una forma de simular promedios estadísticos,

podemos hacer esto porque estamos haciendo la hipótesis de que el proceso es estacionario y ergódico, es decir que los promedios estadísticos son iguales a los promedios temporales. Claro que al acortar la longitud de las subsecuencias a N/M y promediar los resultados, ganamos resolución estadística a expensas de perder resolución en frecuencia, es decir que estamos tomando una decisión de compromiso entre una y otra resolución.

El problema con el que nos enfrentamos es encontrar la mejor forma de estimar la densidad del espectro de potencia de una secuencia infinitamente larga, cuando solo disponemos de un intervalo finito de dicha secuencia. Sin importar qué método de estimación utilicemos, en todos los casos, algún tipo de hipótesis tendremos que hacer respecto a los datos no registrados.

11. ¿De qué manera estima la densidad del espectro de potencia el método de Blackman y Tukey?

El método de Blackman y Tukey modela al proceso aleatorio estacionario como la salida de un sistema lineal e invariante caracterizado como un promedio móvil (MA) de orden N , excitado por ruido blanco no correlacionable. El orden del proceso MA está vinculado con el *lag* a partir del cual consideramos que la autocovarianza es igual a cero. El estimador del espectro de potencia será igual al espectro de potencia del operador MA escalado por la varianza del ruido blanco. Este método tiende a dar estimadores espectrales suaves, con poca resolución.

12. ¿De qué manera estima la densidad del espectro de potencia el método de Yule-Walker?

El método de Yule-Walker modela al proceso aleatorio estacionario como la salida de un sistema lineal e invariante caracterizado como un sistema autorregresivo (AR) de orden M , excitado por ruido blanco no correlacionable. El estimador del espectro de potencia será igual a la inversa del espectro de potencia del operador AR escalado por la varianza del ruido blanco. Como es de esperarse la estructura de solo polos del proceso AR, en general produce más detalles o picos en el estimador del espectro de potencia obtenido en comparación con el estimador obtenido modelando la secuencia como un proceso MA.

El operador AR puede obtenerse diseñando un filtro predictivo del error del proceso aleatorio estacionario.

13. ¿De qué manera estima la densidad del espectro de potencia el método de Burg?

El método de Burg se basa en el principio de máxima entropía. Estima simultáneamente la autocorrelación del proceso aleatorio estacionario y un filtro predictivo del error, evitando los efectos de la ventana de observación de longitud finita y sin hacer ninguna hipótesis sobre el dato fuera de la ventana de observación. El procedimiento de Burg es recursivo, comienza diseñando un filtro que predice el error de longitud 2, que intenta convertir el dato de entrada en ruido blanco. Mediante esta recursión es posible extender el filtro predictivo hasta alcanzar un orden M . Finalmente el espectro de potencia del dato es estimado como la inversa del espectro de potencia del filtro que predice el error.