Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 9

Filtros Inversos y Deconvolución

1. ¿Cuándo diremos que un sistema o que una señal son invertibles?

   En la primer clase de este curso, cuando estudiamos cinco propiedades de especial interés de los sistemas: linealidad, invarianza, estabilidad, causalidad e invertibilidad. Dijimos que un sistema en el que la entrada x_n y la salida y_n están vinculadas por alguna operación, que de manera genérica expresamos del siguiente modo:

$$y_n = S\{x_n\}$$

   El sistema será invertible si es posible hallar otro sistema que nos permita expresar la entrada en función de la salida. Es decir, si existe el sistema inverso que defina la siguiente operación:

$$x_n = S^{-1}\{y_n\}$$

   En particular si el sistema invertible es lineal e invariante con una respuesta impulsiva h_n , entonces estas relaciones pueden expresarse del siguiente modo:

$$y_n = x_n * h_n$$

   En este caso diremos que el sistema lineal e invariante es invertible, si existe la respuesta impulsiva del sistema lineal e invariante inverso h_n^{-1} , que satisfaga:

$$x_n = y_n * h_n^{-1}$$

   Es decir, que la respuesta impulsiva del sistema h_n y la respuesta impulsiva del sistema inverso h_n^{-1} , deben cumplir la siguiente condición:

$$x_n = y_n * h_n^{-1} = x_n * h_n * h_n^{-1}$$

$$h_n * h_n^{-1} = \delta_n$$

   Lo cual expresado en el dominio de las respuestas en frecuencia se puede escribir de la siguiente manera:

$$H(\omega) \times H^{-1}(\omega) = 1$$

   En consecuencia el operador inverso se podría obtener de la siguiente manera:

$$h_n^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H^{-1}(\omega)\, e^{i\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{H(\omega)}\, e^{i\omega n}\, d\omega$$

   Esto implica resolver una integral, lo cual no es lo que habitualmente haremos.
   Recordemos además que la propiedad de invertibilidad no es exclusiva de los sistemas, sino

que podemos hacerla extensiva a las señales. Es decir, dada una señal x_n su señal inversa x_n^{-1} debe cumplir:

$$x_n * x_n^{-1} = \delta_n$$

Nos referiremos a una ondícula como una señal que tiene un origen definido, energía finita y una longitud determinada. En métodos sísmicos de prospección el concepto de ondícula se asocia al de la firma de la fuente. En esta disciplina es de particular interés encontrar el operador inverso de la ondícula, el cual nos permitirá colapsar la ondícula y mejorar la resolución vertical de este método de exploración geofísica. Sin embargo, las firmas de las fuentes son señales de banda limitada, cuyas transformadas Z tienen ceros sobre el círculo unidad. En rigor matemático si una señal tiene un cero en su espectro de amplitud, su operador inverso no existe, sin embargo veremos como encontrar soluciones de compromiso a este problema.

2. ¿Qué entiende por deconvolucionar?

Podemos pensar a la deconvolución como la operación inversa a la convolución.
Es decir, dada una señal $c_n = a_n * b_n$ podríamos deconvolucionarla, para recuperar tanto a_n como b_n a partir de c_n , si conociéramos los operadores inversos b_n^{-1} y a_n^{-1} respectivamente:

$$a_n = c_n * b_n^{-1}$$

$$b_n = c_n * a_n^{-1}$$

Cuando estudiamos filtros elementales y transformada Z vimos que el operador inverso de un dipolo, la más simple de las secuencias, es un operador de longitud infinita. Para el caso de un dipolo de fase mínima $\boldsymbol{h_n} = (1, -k)$, su inversa causal y estable está dada por:

$$\boldsymbol{h_n^{-1}} = (1, k, k^2, k^3 k^4, k^5, k^6, k^7, k^8, k^9, k^{10}, \cdots)$$

Es decir que si la inversa de un dipolo es un operador infinito y cualquier señal de longitud arbitraria N se puede descomponer en el dominio de la transformada Z como la factorización de $N-1$ dipolos más un factor de escala, entonces el operador inverso de una secuencia de longitud arbitraria N será siempre infinito.

3. ¿Cuál es la señal que verdaderamente nos entrega un instrumento de registración y cómo prodríamos recuperar la señal original presente en la entrada del sistema de registración?

Las señales con las que habitualmente trabajamos en geofísica son señales analógicas de banda limitada, que para poder registrarlas y guardarlas en un formato digital debemos digitalizarlas, es decir discretizarlas y cuantizar su amplitud. Si al digitalizarlas cumplimos con ciertas condiciones, como por ejemplo con el criterio de Nyquist-Shannon para elegir el intervalo de muestreo, nos será posible recuperar la señal analógica a partir de la señal digitalizada.
La respuesta impulsiva h_n de un instrumento de registración nunca es un impulso unitario:

$$h_n \neq \delta_n \Leftrightarrow H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \neq 1 e^{i0}$$

Es decir que la consecuencia de que la señal analógica pase por nuestro sistema de registración no será únicamente la digitalización, sino que además la señal se verá distorsionada por la respuesta impulsiva h_n del instrumento, tanto en su espectro de amplitud como de fase. Para recuperar la señal original deseada es necesario conocer la respuesta impulsiva h_n del instrumento, la cual habitualmente es proporcionada por el fabricante, y debemos calcular el operador inverso h_n^{-1} del sistema de registración:

$$x_n = y_n * h_n^{-1}$$

Si la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del instrumento se anula para alguna frecuencia presente en la señal de entrada, entonces nunca podremos recuperar esa frecuencia de la señal de entrada.

4. ¿Cuál es el problema de deconvolucionar en el dominio discreto de las frecuencias?

Dado un operador de convolución en tiempo f_n , queremos hallar el operador inverso f_n^{-1} tal que:

$$f_n * f_n^{-1} = \delta_n$$

Para no tener que trabajar con la transformada de Fourier del operador discreto, es decir con su respuesta en frecuencia $F(\omega)$, nos podemos ver tentados a trabajar con la transformada discreta de Fourier, es decir, tomamos TDF a la expresión anterior y obtenemos:

$$F_k \times F_k^{-1} = 1$$

Entonces si: $F_k = |F_k| e^{i\varphi_k} \quad \Rightarrow \quad F_k^{-1} = \frac{1}{|F_k|} e^{-i\varphi_k} \quad \Rightarrow \quad f_n^{-1} = TDF^{-1}\{F_k^{-1}\}$

Si para alguna frecuencia ω_k resulta que $F_k = 0$ entonces el operador f_n^{-1} no existirá.
El problema de este razonamiento es que está basado en el teorema de convolución de la transformada discreta de Fourier, el cual sólo es válido para convolución circular. Si la convolución es circular y la transformada discreta de Fourier no tiene ceros en su espectro de amplitud, entonces este razonamiento nos permitirá encontrar un operador exacto de deconvolución circular, excepto en algunas situaciones que aquí no detallaremos.
Sin embargo, habitualmente trabajaremos con convolución lineal y el operador f_n^{-1} será de longitud infinita, por lo tanto para emular la convolución lineal con la transformada discreta de Fourier deberemos agregarle infinitos ceros a la secuencia f_n en tiempo, antes de ir al dominio de la transformada discreta de Fourier, una vez en el dominio discreto de las frecuencias debemos calcular el recíproco del espectro, luego tomar la transformada discreta inversa para finalmente obtener el operador inverso de longitud infinita $f_n^{-1} = TDF^{-1}\{F_k^{-1}\}$
Obviamente, no es posible agregar infinitos ceros a la secuencia f_n antes de ir al dominio discreto de Fourier, es decir no es posible calcular el operador inverso infinito de esta manera.

5. El operador inverso es siempre un operador infinito. También estudiamos que era infinita la respuesta en tiempo de un filtro ideal de frecuencias. ¿Cuál es la diferencia entre la respuesta impulsiva de un filtro ideal de frecuencias truncado y un filtro inverso infinito truncado? Esta diferencia es la que hace necesaria la implementación de los filtros Wiener inversos.

Cuando estudiamos filtros pasa-bajos ideales vimos que la respuesta impulsiva infinita en tiempo del filtro pasa-bajos ideal, truncado a una longitud $2N+1$, era óptima según el criterio de los cuadrados mínimos, aunque debemos recordar que por más largo que hagamos el operador truncado el fenómeno de Gibbs no puede ser atenuado.
Esto no sucede con el filtro inverso infinito truncado, es decir no es un filtro óptimo en sentido de los cuadrados mínimos como sí lo es el filtro pasa-bajo ideal truncado.
Veremos como diseñar un operador que intente hacer el trabajo de un operador inverso, que sea de longitud finita y que sea óptimo según el criterio de los cuadrados mínimos.

6. ¿Qué es un filtro Wiener? ¿Qué es un filtro conformador o *shaping filter*?

Dada una señal x_n de longitud M , deseamos diseñar un operador lineal e invariante f_n de longitud N , que al convolucionarlo con la señal x_n intente convertirla en otra señal deseada d_n . Nuestro operador f_n nunca logrará convertir a x_n exactamente en d_n , pero sí podemos pedirle que haga un trabajo óptimo según el criterio de los cuadrados mínimos. Con este propósito planteamos la siguiente función objetiva a minimizar:

$$\theta(f_n)=\sum_{k=0}^{N+M-1}\left(d_k-\sum_{n=0}^{N-1} f_n x_{k-n}\right)^2=mínimo$$

Al derivar esta función objetiva a minimizar respecto de cada uno de los N elementos de f_n e igualar cada una de estas derivadas a cero, obtendremos un sistema de ecuaciones normales con N ecuaciones y N incógnitas, que nos permitirá obtener el operador óptimo f_n de longitud N . Este sistema de ecuaciones normales se puede expresar en notación matricial de la siguiente manera:

$$\Phi_{xx} f=\Phi_{xd} \quad \Rightarrow \quad f=\Phi_{xx}^{-1}\Phi_{xd}$$

Donde Φ_{xx} es la matriz de autocorrelación de la entrada x_n , Φ_{xd} es el vector columna de correlación cruzada entre la entrada x_n y la salida deseada d_n , y f es un vector columna que contiene los elementos del operador óptimo buscado f_n .
El operador f_n se conoce con el nombre de filtro Wiener o filtro conformador.
El hecho de haber minimizado la suma de los residuos al cuadrado es completamente arbitraria, podríamos haber utilizado cualquier otra norma de optimización, sin embargo la norma L2 permite obtener una solución conveniente de manera sumamente sencilla.

7. ¿Qué es un filtro Wiener inverso? ¿Qué ventaja tiene sobre el filtro inverso truncado a la misma longitud?

En el caso particular en el que la salida deseada del filtro Wiener sea un impulso unitario $d_n=\delta_n$ diremos que es el filtro Wiener es un filtro Wiener inverso $f=\Phi_{xx}^{-1}\Phi_{x\delta}$. La ventaja del filtro Wiener inverso respecto del filtro inverso infinito exacto truncado a la misma longitud, es que el filtro Wiener inverso es un filtro óptimo en el sentido de los cuadrados mínimos. En consecuencia la suma de las diferencias al cuadrado entre la salida del filtro inverso y la salida deseada, será menor para el filtro Wiener inverso que para el filtro inverso exacto truncado a la misma longitud.

8. ¿Cuando un filtro Wiener inverso es causal y cuando es de fase mínima?

   Análogamente a lo que sucede con los filtros inversos, un filtro Wiener inverso será causal cuando la entrada sea de fase mínima, será anticausal cuando la entrada sea de fase máxima y será no causal, es decir tendrá componentes con memoria y componentes anticipativas o sin memoria, cuando la señal sea de fase mixta.
   Los filtros inversos, los filtros inversos truncados y los filtros Wiener inversos de señales de fase mínima, también serán filtros de fase mínima.
   Además, análogamente a lo que sucede con los filtros inversos, los filtros Wiener inversos de entradas de fase máxima serán anticausales y los filtros Wiener inversos de entradas de fase mixta tendrán componentes de memoria y componentes anticipativas o sin memoria.
   Sin embargo, veremos cómo retrasar el impulso unitario de la salida deseada, según sea la fase de la entrada, para trabajar siempre con filtros Wiener inversos causales independientemente de la fase de la entrada, y de esta manera evitar trabajar con subíndices negativos.
   Es importante recordar que la fase de un filtro Wiener inverso de una señal de entrada de fase mínima es de fase mínima y en este caso debemos colocar el impulso unitario de la salida deseada a *lag* cero.

9. ¿Cuál es la ventaja de suponer que la señal que deseamos deconvolucionar es de fase mínima a la hora de diseñar al filtro Wiener inverso?

   Si suponemos que la señal de entrada es una señal de fase mínima, entonces debemos colocar el impulso unitario de la salida deseada a *lag* cero. La consecuencia de esto es que el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada será un vector de la misma longitud que el filtro Wiener inverso e igual a:

$$\Phi_{x\delta}=\left(x_o\,0\,0\,0\,0\,0\cdots 0\right)^T$$

   Si sólo conocemos la autocorrelación de la señal de entrada Φ_{xx} pero no conocemos la señal de entrada x_n , tampoco conocemos x_o , entonces en el primer elemento de $\Phi_{x\delta}$ ponemos un 1 seguido de $N-1$ ceros, esto nos permitirá obtener nuestro operador Wiener inverso salvo un factor de escala.
   La matriz de autocorrelación no tiene información del espectro de fase de la entrada, la información de fase mínima la estamos incorporando al colocar el impulso unitario a *lag* cero. De las 2^{M-1} secuencias equivalentes de longitud M que tienen la misma autocorrelación este operador sólo deconvolucionará correctamente a la secuencia de fase mínima equivalente. Si se lo aplicamos a cualquiera de las secuencias equivalentes restantes blanqueará el espectro de amplitud de la salida pero su espectro de fase estará mal, no será cero ni lineal.
   Es decir que la ventaja de suponer que la entrada es de fase mínima es que podemos calcular el operador inverso, salvo factor de escala, conociendo únicamente la autocorrelación de la entrada. No necesitamos conocer la entrada, sólo su autocorrelación.

10. ¿Que precaución debemos tomar al diseñar filtros Wiener inversos de señales que son de fase cero, máxima o mixta? ¿De qué información adicional debemos disponer para poder hacer el diseño?

    Como ya hemos mencionado el filtro Wiener inverso de una señal x_n de longitud M de fase mínima es causal, el de una señal de fase máxima es anticausal, y el de una señal de fase mixta es no causal, es decir poseerá componentes de memoria y anticipativas. Sin embargo los filtros Wiener inversos que diseñamos son siempre causales, es decir:

$$\boldsymbol{f_n}=(f_0,f_1,f_2,f_3,\cdots,f_{N-1})$$

Para tener en cuenta la fase de la entrada, en vez de diseñar filtros no causales lo que vamos a hacer es retardar el impulso unitario de longitud $M+N-1$ según sea la fase de la señal de entrada. Es decir, si x_n es de fase mínima la salida deseada será $d_n=\delta_n$, si es de fase cero será $d_n=\delta_{n-\frac{M+N-1}{2}}$, si es de fase máxima será $d_n=\delta_{n-(M+N-1)}$, y si es de fase mixta será $d_n=\delta_{n-?}$. En el caso de fase mixta el retardo óptimo dependerá del *lag* al que esté acumulada la mayor cantidad de energía de la señal de entrada, o también el retardo puede ser pensado en función de qué componente del filtro inverso tiende más rápidamente a un valor despreciable, la causal o la anticausal.
Luego de aplicar el filtro Wiener inverso es posible corregir la señal de salida por el retardo introducido al impulso unitario de la salida deseada.
Como mencionamos el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada, será un vector de longitud N que en el caso de fase mínima será igual a:

$$\Phi_{x\delta}=(x_o\; 0\; 0\; 0\; 0\; 0 \cdots 0)^T$$

Y en el caso de fase máxima será igual a:

$$\Phi_{x\delta}=(0\; 0\; 0\; 0 \cdots 0\; 0\; x_{M-1})^T$$

Para el resto de las señales equivalentes de fase mixta, deberemos conocer la señal de entrada para poder calcular el vector de correlación cruzada entre la entrada y el impulso unitario retardado de la salida deseada $\Phi_{x\delta}$, ya que tomará valores distintos de cero.

11. ¿ Qué es una matriz de Toeplitz? ¿Qué nos permite encontrar el algoritmo de Levinson?

El producto de convolución entre la entrada x_n y el filtro Wiener inverso f_n se puede escribir en forma matricial utilizando la matriz de convolución asociada a la señal de entrada:

$$x_n * f_n \quad \equiv \quad X f$$

En esta notación matricial la expresión que nos permite obtener el filtro Wiener inverso se puede escribir de la siguiente manera:

$$f=(X^T X)^{-1} X^T \delta$$

Es decir que la matriz de autocorrelación de la entrada está dada por:

$$\Phi_{xx}=X^T X$$

Y el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada está dado por:

$$\Phi_{x\delta}=X^T \delta$$

La matriz $\Phi_{xx}=X^T X$ posee una estructura muy particular, es una matriz cuadrada de orden N , simétrica, en la cual los elementos de todas las diagonales son idénticos entre sí. Una matriz con esta estructura es denominada matriz de Toeplitz y para resolver el sistema de ecuaciones normales $X^T X f=X^T \delta$ no hace falta invertir la matriz de Toeplitz, sino que se puede encontrar la solución de manera sumamente eficiente utilizando un algoritmo recursivo que aprovecha la estructura de la matriz de Toeplitz llamado algoritmo de Levinson.

12. ¿Qué es la regularización de Tikonov y por qué es necesario aplicarla cuando la señal que deseamos deconvolucionar es de banda limitada?

    Ya mencionamos las razones por las cuales cuando el espectro de amplitud de una señal se hace cero para alguna frecuencia, esa señal no admite inversa. Sin embargo, todas las señales con las que trabajamos deben cumplir con el criterio de Nyquist-Shannon, en consecuencia entre la frecuencia máxima presente en la señal y la frecuencia de Nyquist el espectro de amplitud será nulo o despreciable, por lo tanto en rigor matemático ninguna de las señales con las que trabajamos admiten filtro inverso ni filtro Wierner inverso. En el caso del filtro Wiener inverso esta situación se manifestará en el hecho que la matriz de autocorrelación de la señal es una matriz singular que no admite inversa, o puede manifestarse en el hecho que es una matriz mal condicionada, en este caso el filtro Wiener inverso contaminará con ruido de alta frecuencia al resultado de la inversión.
    Con el propósito de estabilizar la matriz y minimizar el problema, lo que se hace es sumarle ruido blanco no correlacionable a la señal antes de calcular su filtro Wiener inverso, esto se manifestará en el sistema de ecuaciones normales, que nos permite obtener el filtro Wiener inverso, como la suma a la diagonal principal de la matriz de autocorrelación de la señal, es decir la autocorrelación a *lag* cero $\Phi_{xx}(0)$, de un pequeño porcentaje de sí misma del orden de $\mu=0{,}01\%$:

$$f=\left(X^T X+\mu\,\Phi_{xx}(0)\,I\right)^{-1} X^T \delta$$

    Este parámetro μ recibe el nombre de parámetro de preblanqueo.
    Hacer esto es equivalente a agregarle a la función objetiva a minimizar un término de regularización, a este procedimiento se lo denomina regularización de Tikonov:

$$\theta(f_n)=\sum_{k=0}^{N+M-1}\left(d_k-\sum_{n=0}^{N-1} f_n x_{k-n}\right)^2+\alpha\sum_{k=0}^{N-1}(f_k)^2=mínimo$$

    Donde $\alpha=\mu\Phi_{xx}(0)$ es un parámetro que tiene el papel de árbitro que establece el balance entre resolución (colapso de la señal) y estabilidad de la solución (o contaminación de alta frecuencia). El primer término de la función objetiva a minimizar intentará que el operador Wiener inverso reemplace a la señal x_n por un impulso unitario, mientras que el segundo término intentará que la norma L2 al cuadrado del operador f_n sea mínima, α decidirá cuál de los términos tiene más peso.

13. ¿Qué es un filtro predictivo?

    Dada una señal x_n queremos diseñar un filtro Wiener f_n de longitud N que nos permita predecir una muestra de la señal como una combinación lineal de las N muestras anteriores:

$$x_{n+1}=f_0 x_n+f_1 x_{n-1}+f_2 x_{n-2}+f_3 x_{n-3}+\cdots+f_{N-1} x_{n-(N-1)}$$

    Es decir, queremos diseñar un filtro Wiener cuya salida deseada no sea mas que la misma

señal de entrada x_n pero adelantada una muestra, es decir x_{n+1} .
Observe que el filtro predictivo f_n será función únicamente de la matriz Φ_{xx} de autocorrelación, ya que el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada Φ_{xd} será igual al vector de correlación cruzada entre la entrada y la misma entrada adelantada una muestra $\Phi_{xd}(\tau)=\Phi_{xx}(\tau+1)$, es decir que todas las señales equivalentes tendrán el mismo filtro predictivo, sin embargo este filtro predictivo causal hará un mejor trabajo para la secuencia de fase mínima equivalente. Cuando el valor actual de una señal depende de valores pasados y de valores futuros, el filtro predictivo trabajará mejor si intentamos predecir el valor actual como una suma escalada de valores pasados y futuros.

14. ¿Qué es un filtro predictivo del error? ¿En qué se diferencia de un filtro Wierner inverso de fase mínima?

Obviamente el filtro Wiener predictivo no logrará predecir de manera exacta la muestra x_{n+1} en función de las N muestras anteriores. Sólo hará una predicción óptima según el criterio de los cuadrados mínimos. El error de predicción estará dado por:

$$\left(x_{n+1}-\sum_{n=0}^{N-1} f_k x_{n-k}\right)=1\,x_{n+1}-f_0 x_n-f_1 x_{n-1}-f_2 x_{n-2}-f_3 x_{n-3}-\cdots-f_{N-1} x_{n-(N-1)}$$

Es decir que el filtro predictivo del error (*prediction error filter*) f_n^{pef} será un filtro de longitud $N+1$ dado por:

$$f_n^{pef}=(1,-f_0,-f_1,-f_2,-f_3,\cdots,-f_{N-1})$$

El filtro predictivo del error solo diferirá del filtro Wiener inverso de fase mínima en un factor de escala, el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada estará dado por $\left(x_o^2\;0\;0\;0\;0\;0\cdots 0\right)^T$.

15. ¿Qué es un filtro correlador? Mencione alguna aplicación.

Dada una señal real $\boldsymbol{s_n}=(s_0,s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{N-1})$, imaginemos que se encuentra sumergida en un ruido de longitud mucho mayor, y que estamos interesados en determinar el instante de tiempo en el cual esta señal conocida se encuentra presente en el ruido. Es decir, queremos encontrar un operador que al convolucionarlo con el ruido, nos entregue a la salida del producto de convolución un valor máximo asociado al instante de tiempo en el que la señal conocida s_n se encuentra ubicada. Se puede demostrar que este operador no es más que la misma señal pero revertida, es decir $(s_{N-1},\cdots,s_3,s_2,s_1,s_0)$. Si recordamos, convolucionar con una señal revertida y conjugada, en este caso sólo revertida porque s_n es real, es equivalente a correlacinar, motivo por el que a este operador se le da el nombre de filtro correlador. Este operador tiene una gran cantidad de aplicaciones. Por mencionar algunas podemos decir que tanto en sistemas de radar como así también en sistemas de sonar, se emite una señal conocida, a la vez que se registra la señal recibida y se la va correlacionando con la señal emitida. En el instante que emitimos la señal comenzamos a medir el tiempo. La señal emitida, en algún momento, se refleja contra algún objeto y regresa al sistema emisor/receptor. En el instante en que el filtro correlador nos dé un valor máximo de amplitud, superior a cierto umbral, obtendremos el tiempo que le tomó a la señal en ir del emisor al objeto y regresar al receptor. Conocida la velocidad de propagación de la señal en el medio, esto nos permitirá calcular la distancia al objeto, y si tenemos un arreglo

de emisores/receptores con ubicaciones conocidas podremos calcular la ubicación del objetivo por triangulación. Esto es análogo a lo que sucede en métodos sísmicos de prospección cuando utilizamos camiones vibradores como fuentes de energía. Cuando determinamos la ubicación de una gran cantidad de puntos reflectores podremos construir una imagen.
Cuando calculamos coordenadas GPS por el método de las seudo-distancias, también estamos realizando una correlación cruzada entre un código seudo-aleatorio emitido por el satélite y conocido por el receptor, con la señal recibida por el receptor. En este ejemplo la diferencia es que no medimos tiempo doble, solo medimos el tiempo que le toma a la señal viajar del satélite al receptor, razón por la cual el reloj del emisor (el satélite) debe estar sincronizado con el reloj del receptor, como esto no sucede, para hacer la triangulación necesitaremos como mínimo cuatro satélites. La necesidad de un cuarto satélite es requerida para corregir el error del reloj del receptor respecto a los relojes de los satélites, los cuales son relojes atómicos muy precisos quienes sí están sincronizados.