Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 8

Diseño de filtros digitales

1. ¿Qué es un filtro de frecuencias? ¿Qué tipo de filtros de frecuencias conoce? ¿Cuál es el objetivo del diseño de filtros digitales de frecuencias?

   Un filtro de frecuencias es un dispositivo electrónico analógico o un operador digital lineal e invariante que al aplicarlo a una señal, remueve de ella las componentes de frecuencias no deseadas, o bien selecciona las componentes de frecuencias deseadas.
   Básicamente podemos considerar tres tipos de filtros de frecuencias diferentes: pasa-bajo, pasa-alto o pasa-banda, según el rango de frecuencias que deseemos preservar.
   El objetivo de las técnicas de diseño de filtros digitales es obtener la respuesta impulsiva del filtro discreto, cuya respuesta en frecuencia sea la que mejor se ajusta a la respuesta en frecuencia deseada. Esta respuesta frecuencia deseada será tal que nunca presente discontinuidades, como es el caso de la respuesta en frecuencia de un filtro ideal. Los motivos de la necesidad de evitar discontinuidades, es la de lograr filtros más cortos en tiempo y que no presenten las distorsiones en el espectro de amplitud de la señal introducidas por el fenómeno de Gibbs.

2. ¿Qué es un filtro pasa-bajos digital ideal? ¿Cual es la dificultad de su implementación práctica?

   Como ya hemos visto un filtro pasa-bajos ideal con frecuencia de corte ω_c es aquel filtro cuya respuesta en frecuencia es una función cajón de ancho de banda $2\omega_c$ en el intervalo $(-\pi,\pi)$, y que fuera de este intervalo se extiende a infinita y periódica:

$$F_{\omega_c}^{pasa-bajo}(\omega)=1 \text{ si } -\omega_c<\omega<\omega_c<\pi \text{ y } F_{\omega_c}^{pasa-bajo}(\omega)=0 \text{ si } -\pi<\omega<-\omega_c \text{ y } \omega_c<\omega<\pi$$

   Su respuesta impulsiva $f_{\omega_c}^{pasa-bajo}{}_n$ está dada por:

$$f_{\omega_c}^{pasa-bajo}{}_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_{\omega_c}^{pasa-bajo}(\omega)\,e^{i\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\,e^{i\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\omega n}}{i\,n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$$

$$f_{\omega_c}^{pasa-bajo}{}_n=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad \text{para} \quad n=-\infty,\infty$$

   Es decir que la respuesta impulsiva infinita de un filtro pasa-bajos ideal es un seno cardinal de amplitud $\frac{\omega_c}{\pi}$ y frecuencia ω_c . Como el seno cardinal es una función simétrica el espectro de fase de este filtro pasa-bajo será cero, en realidad a esto ya lo sabíamos porque $F_{\omega_c}^{pasa-bajo}(\omega)$ es real.
   Este filtro pasa-bajo ideal tiene una respuesta impulsiva infinita, por lo tanto el problema para su implementación práctica es que para poder aplicarlo como una convolución en el dominio del tiempo deberemos truncarlo. Como vimos al estudiar el fenómeno de Gibbs, al truncar el filtro en tiempo con una función cajón se modifica su respuesta en frecuencia introduciendo una distorsión no deseada en el espectro de frecuencia de la señal.

Por otra parte, si queremos aplicarlo como un producto en el dominio discreto de las frecuencias, será equivalente a una convolución circular, es decir estaremos extendiendo a periódica e infinita una respuesta impulsiva que ya es infinita, es decir estaremos produciendo aliasing temporal.

3. ¿Cómo es posible obtener la respuesta impulsiva de filtros pasa-alto y pasa-banda a partir de la respuesta impulsiva de un filtro pasa-bajo?

   La repuesta impulsiva de un filtro pasa-alto y de un filtro pasa-banda se pueden obtener a partir de la respuesta impulsiva de un filtro pasa-bajo de la siguiente manera:

$$f^{pasa-alto}_{\omega_c \; n} = \delta_n - f^{pasa-bajo}_{\omega_c \; n} \quad \Leftrightarrow \quad F^{pasa-alto}_{\omega_c}(\omega) = 1 - F^{pasa-bajo}_{\omega_c}(\omega)$$

$$f^{pasa-banda}_{\omega_{cb}-\omega_{ca} \; n} = f^{pasa-bajo}_{\omega_{ca} \; n} - f^{pasa-bajo}_{\omega_{cb} \; n} \quad \Leftrightarrow \quad F^{pasa-banda}_{\omega_{ca}-\omega_{cb}}(\omega) = F^{pasa-bajo}_{\omega_{ca}}(\omega) - F^{pasa-bajo}_{\omega_{cb}}(\omega)$$

4. ¿Explique porqué nos será imposible aislar de manera precisa un frecuencia particular presente en una señal?

   Para que una señal tenga una respuesta en frecuencia de alta resolución debemos observarla en un intervalo de tiempo de longitud infinita. Por otra parte para que un filtro de frecuencias sea perfectamente selectivo, es necesario que su respuesta en tiempo sea infinitamente larga. Nunca lograremos satisfacer ninguna de estas dos condiciones, es decir que no lograremos aislar una frecuencia presente en la señal mediante un filtro de frecuencia. Existen otras técnicas para hacer eso.
   Por ejemplo, si quisiéramos aislar la componente undecenal del campo magnético terrestre deberíamos disponer de una serie de tiempo geomagnética infinita y deberíamos aplicarle un filtro de frecuencias de longitud infinita, obviamente ninguna de las dos cosas son posibles.

5. ¿Cuál es la relación de compromiso que se presenta entre la selectividad del filtro y la longitud de su respuesta impulsiva?

   La respuesta impulsiva de un filtro pasa bajo ideal es un seno cardinal con un lóbulo central angosto y con lóbulos laterales altos que tienden asintóticamente a cero muy lentamente. Si hacemos que el filtro sea menos selectivo, es decir, si hacemos que <u>no</u> tenga un corte abrupto en la frecuencia ω_c introduciendo una zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, lograremos que la respuesta impulsiva del filtro tenga una forma similar a la de un seno cardinal pero con un lóbulo central más ancho y con lóbulos laterales más bajos que tiendan asintóticamente más rápidamente a cero. Es decir, tendremos una relación de compromiso entre la selectividad del filtro en frecuencia, o el ancho de la zona de transición, y la longitud de la respuesta impulsiva filtro en tiempo.

6. ¿En qué consiste la técnica de diseñar filtros digitales utilizando zonas de transición?

   Una técnica para diseñar filtros digitales cuya respuesta en frecuencia se ajuste mejor a la respuesta en frecuencia deseada, es proponer una respuesta en frecuencia deseada menos selectiva, es decir, que posea una zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo. Esto hará que el filtro en tiempo tienda más rápidamente a un valor de amplitud despreciable y que cuando lo trunquemos en tiempo se produzca un distorsión despreciable de la respuesta en frecuencia propuesta.

7. ¿En qué consiste la técnica de diseñar filtros digitales haciendo uso de ventanas suaves en tiempo como por ejemplo las ventanas de Bartlett (o triangular), Welch, Hanning, Hamming, Blackman, etc., para truncar la respuesta impulsiva del filtro pasa-bajo ideal?

   Si tomamos la respuesta impulsiva del filtro pasa-bajo ideal, es decir el seno cardinal:

$$f^{pasa-bajo}_{\omega_c}{}_n = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad \text{para} \quad n=-\infty,\infty$$

   y en vez de truncarlo con una función cajón o ventana rectangular, lo truncamos con una ventana suave, que en sus extremos tienda a lentamente a cero como cualquiera de las ventanas mencionadas, obtendremos un filtro de longitud finita cuya respuesta en frecuencia tendrá una zona de transición. Es decir que las dos técnicas de diseño son análogas, ya que al truncar la respuesta impulsiva en tiempo del filtro pasa-bajo ideal con una ventana suave, también estaremos introduciendo en frecuencia una zona de transición. La ventaja de diseñar el filtro con una zona de transición en frecuencia es que tenemos más control del valor de la frecuencia de corte ω_c que ahora ya no estará en una discontinuidad sino donde el espectro de amplitud del filtro pasa-bajo caiga a un valor de $\sqrt{2}/2$ o el espectro de potencia caiga a un valor de $1/2$.

8. ¿Qué significa que un filtro tenga una respuesta en amplitud de 0dB, -3dB, -6dB, -12dB, -18dB y -24dB para una determinada frecuencia? ¿Cómo se define la frecuencia de corte de un filtro no ideal?

   Un valor del espectro de amplitud A asociado a determinada frecuencia se puede expresar en decibeles (dB), respecto a un valor de amplitud de referencia A_o , utilizando la siguiente expresión:

$$20\times\log_{10}\left(\frac{A}{A_o}\right)dB$$

   La ventaja de expresar las amplitudes en decibeles es que cuando colocamos filtros en cascada sus espectros de amplitud no se multiplican sino que se suman.
   Es costumbre también expresar el rango dinámico de los instrumentos en decibeles, es decir el cociente entre la amplitud más grande y la amplitud más pequeña que es capaz de registrar un instrumento.
   En el caso de los filtros de frecuencias la amplitud de referencia es $A_o=1$ por lo tanto si:

$$A=1 \quad\Rightarrow\quad 20\log_{10}(1)=0\,dB$$
$$A=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=-3\,dB$$
$$A=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=-6\,dB$$
$$A=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=-12\,dB$$
$$A=\frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=-18\,dB$$

$$A = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = -24\,dB$$

Se acostumbra definir la frecuencia de corte de los filtros de frecuencia como aquella frecuencia en la cual el espectro de amplitud cae a $-3\,dB$ es de decir a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o lo que es equivalente donde el espectro de potencia cae a $-6\,dB$ es decir a la mitad.

9. ¿Qué significa que un filtro pasa-bajo tenga una zona de transición con una pendiente de 36dB por octava?

   No solo es costumbre, especialmente en ingeniería electrónica, especificar la frecuencia de corte como la frecuencia en la cual la amplitud cae a $-3\,dB$ sino también es costumbre expresar la pendiente de la zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo en decibeles por octava, donde una octava es el intervalo de frecuencias en el cual la frecuencia se duplica, por ejemplo entre $40\,Hz$ y $80\,Hz$ tenemos una octava. Es decir que una pendiente de $36\,dB/oct$ significa que en un rango de frecuencias en el cual la frecuencia se duplica, el espectro de amplitud del filtro cae en $1/64$ veces o 36dB.

10. ¿Qué es un filtro de Chebyshev?

    Un filtro de Chebyshev es un filtro en el cual la máxima diferencia entre la respuesta en frecuencia actual del filtro y la respuesta ideal, es mínima. Este criterio de optimización se conoce como criterio de Chebyshev o criterio minimax. La aplicación de este criterio de optimización nos permite obtener un filtro en el cual la amplitud del rizado o *ripple* se mantiene constante a lo largo de todo el espectro de frecuencias.

11. ¿Qué es un filtro de Butterworth?

    Se define al filtro de Butterworth como aquel filtro de frecuencias pasa-bajo que tiene un espectro de potencia igual a:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2\alpha}}$$

    Este espectro de potencia tiene propiedades muy convenientes. La frecuencia de corte del filtro es ω_c , en esta frecuencia la potencia del filtro cae a la mitad (-6dB), y α es el orden del filtro. Este espectro de potencia tiene sus primeras $2\alpha-1$ derivadas iguales a cero en $\omega=0$, a esta propiedad se le da el nombre de máximo aplanamiento. El espectro de amplitud es monótonamente decreciente en ω , con una pendiente final en las altas frecuencias de $6\alpha\,dB/Oct$.
    Los filtros de Butterworth de orden bajo tienen una buena representación en tiempo, es decir son filtros cortos en tiempo. Mientras que los de orden alto tienen una mejor representación en el dominio de las frecuencias, tienen una mayor pendiente final, es decir son más selectivos, pero son más largos en tiempo. Cuanto mayor es el orden del filtro más abrupta es la zona de transición y más larga es la respuesta impulsiva en tiempo. Como la respuesta en frecuencia de estos filtros nunca se anula, es posible diseñar filtros de Butterworth de fase mínima, que se utilizan para filtrar señales de fase mínima de forma tal que la señal filtrada siga siendo de fase mínima.

12. ¿Cuales son las ventajas de filtrar una señal en el dominio de las frecuencias? ¿Describa el procedimiento apropiado para filtrar una señal en el dominio de las frecuencias?

    La posibilidad de utilizar transformada rápida de Fourier hace que esta manera de filtrar sea particularmente atractiva. Cuando el operador es muy corto, convolucionar en el dominio del tiempo es más rápido que multiplicar en el dominio de las frecuencias. Sin embargo, cuando el operador es un poco más largo, multiplicar en el dominio de las frecuencias utilizando la transformada rápida de Fourier es mucho más rápido que convolucionar en tiempo. La ventaja de utilizar operadores en el dominio del tiempo es la de poder implementar el filtrado como un proceso continuo y obtener la señal filtrada en un tiempo cuasi real , mientras que si lo hacemos en el dominio de las frecuencias esto no es posible, tenemos que esperar a terminar de registrar la señal para poder ir al dominio de Fourier y filtrarla. Sabemos que la convolución lineal en tiempo puede ser emulada utilizando la transformada discreta de Fourier agregando ceros en tiempo antes de ir al dominio transformado, para así evitar los efectos de la convolución circular propios de la transformada discreta de Fourier. Si vamos a filtrar una señal de longitud N con un filtro de frecuencias en el dominio de Fourier, debemos saber la longitud M en tiempo que tiene la respuesta impulsiva del filtro que vamos a aplicar como un producto en frecuencias, para agregarle a la señal antes de ir al dominio de Fourier tantos ceros como sean necesario para alcanzar la longitud $N+M-1$. Los filtros de frecuencias cuyos espectros de amplitud se hacen cero para un rango de frecuencia, tienen ceros sobre el círculo unidad por lo tanto, por el teorema de tiempo limitado-banda limitada, son en rigor filtros infinitos en tiempo, pero como tienden asintóticamente a cero siempre alcanzarán una longitud en la cual su amplitud en tiempo tomará un valor despreciable, por lo tanto a los fines prácticos podemos considerarlos de longitud finita.

13. ¿Cómo es posible calcular la verdadera respuesta en frecuencia del filtro de frecuencias aplicado como un producto en el dominio de Fourier?

    Para encontrar la verdadera respuesta en frecuencia del filtro aplicado debemos hacer lo siguiente:
    -1. Calcule la transformada discreta inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia que aplicó, discretizada en las mismas frecuencias en las que hizo la discretización en frecuencia cuando filtró, para así obtener la respuesta impulsiva en tiempo del filtro que aplicó.
    -2. Agregue ceros al final de la respuesta impulsiva obtenida hasta hacer su longitud mucho mayor, quintuplíquela por dar un número.
    -3. Calcule la transformada discreta de Fourier de la respuesta impulsiva con los ceros agregados para así obtener una mejor representación de la verdadera respuesta en frecuencia aplicada.
    La diferencia entre la respuesta en frecuencia verdaderamente aplicada y la respuesta en frecuencia deseada, dependerá de la forma de la respuesta en frecuencia deseada y de la cantidad de ceros que le haya agregado a la señal antes de ir al dominio de Fourier para alcanzar la longitud $N+M-1$, pero habitualmente no conoceremos M . Normalmente la respuesta en frecuencia deseada será tal que su transformada discreta inversa presentará aliasing en tiempo, aunque siempre es posible minimizarlo tanto como lo deseemos.
    El aliasing en tiempo puede producir grandes apartamientos de la respuesta en frecuencia verdaderamente aplicada respecto de la respuesta en frecuencia que deseamos aplicar, estos apartamientos se presentarán como un rizado o ripple en frecuencia, sin embargo en las frecuencias donde se tomaron las muestras originales, las repuestas siempre coincidirán.

Si la respuesta en frecuencia deseada no presenta discontinuidades y varía suavemente, su transformada inversa alcanzará rápidamente un valor de amplitud despreciable, es decir M será pequeño, produciendo una cantidad mínima de aliasing y un apartamiento despreciable entre las respuestas en frecuencia. El filtrado de frecuencias utilizando la transformada rápida de Fourier es particularmente atractivo debido a su velocidad y simplicidad, sin embargo la respuesta en frecuencia verdadera que implícitamente se utiliza en el procedimiento, puede llegar a ser muy diferente a la respuesta en frecuencia deseada, por lo cual es conveniente controlarla o adoptar un criterio de diseño de la respuesta en frecuencia del filtro aplicado que nos asegure que no estamos generando aliasing y que además no permita estimar la cantidad $M-1$ de ceros que debemos agregar a la señal antes de ir al dominio de Fourier.