

Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 7

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

1. ¿Cuáles son las transformadas de Fourier directa e inversa, o análisis y síntesis, de las siguientes señales?
 - a) Una señal definida en dominios continuos, tanto en tiempo como en frecuencia.
 - b) Una señal definida en un dominio continuo de los tiempos, periódica de período T.
 - c) Una señal definida en un dominio continuo de las frecuencias, periódica de período 2π .
 - d) Una señal discreta y periódica en ambos dominios, tanto en tiempo como en frecuencia.
2. Se define a la función peine en tiempo o función de muestreo, como una secuencia infinita de deltas de Dirac regularmente espaciados:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

¿Cuál es la transformada integral de Fourier de esta función peine en tiempo?

3. Se define a la función peine en frecuencia, como una secuencia infinita de deltas de Dirac regularmente espaciados en frecuencia:

$$Q(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Delta\Omega)$$

¿Cuál es la transformada integral inversa de Fourier de esta función peine en frecuencia?

4. Considere una función discreta en tiempo f_n^{PB} , continua y periódica en frecuencia, de período 2π , con respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega) = 1$ si $-\omega_c < \omega < \omega_c < \pi$ y $F^{PB}(\omega) = 0$ si $-\pi < \omega < -\omega_c$ y $\omega_c < \omega < \pi$. Esta respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega)$ es una función cajón de ancho $2\omega_c$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, fuera de este intervalo se extiende a infinita y periódica. Su respuesta impulsiva f_n^{PB} es la de un filtro pasa-bajos ideal, de longitud infinita, con frecuencia de corte ω_c .

¿Cuál es su transformada inversa de Fourier f_n^{PB} ?

5. Truncamos la respuesta impulsiva infinita f_n^{PB} del filtro pasa-bajos ideal de la pregunta anterior entre $-N < n < N$ para obtener $\hat{f}_n^{PB}$. ¿En qué difieren la respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega)$ del filtro ideal y la respuesta en frecuencia $\hat{F}^{PB}(\omega)$ de la respuesta impulsiva truncada $\hat{f}_n^{PB}$?

6. ¿Por qué decimos que la respuesta impulsiva truncada $\hat{f}_n$ de longitud $2N+1$ es óptima en el sentido de los cuadrados mínimos?
7. ¿Explique qué es el fenómeno Gibbs y de qué manera puede ser atenuado?

8. En la página de la materia puede encontrar un apunte en el que se explica cuales son las consecuencias de discretizar una señal analógica:

http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/señales/apuntes/Consecuencias_de_Discretizar.pdf

Lea el apunte y respóndase las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué condición debe cumplir una señal analógica para poder ser discretizada?
- b) ¿Cuál es la consecuencia en frecuencia de discretizar en el dominio del tiempo?

- c) ¿Qué es el aliasing en frecuencia y de qué manera se puede evitar?
- d) ¿Por qué se produce la pérdida de resolución en frecuencia y de qué manera se puede atenuar?
- e) ¿Qué es el “leakage”, pérdida o fuga? ¿De qué maneras se puede minimizar?
- f) ¿Cuál es la consecuencia en tiempo de discretizar en frecuencia?
- g) ¿Qué es el aliasing en tiempo y de qué manera se puede evitar?

9. ¿Qué sucederá con las frecuencias angulares $\Omega_{max}^{(\Delta t)}$, $\Omega_N^{(\Delta t)}$ y $\Omega_M^{(\Delta t)}$, si cambiamos el intervalo de muestreo Δt por $\Delta t/2$?

10. ¿Qué sucederá con las frecuencias angulares digitales $\omega_{max}^{(\Delta t)}$, $\omega_N^{(\Delta t)}$ y $\omega_M^{(\Delta t)}$, si cambiamos el intervalo de muestreo Δt por $\Delta t/2$?

11. ¿Qué sucederá con el espectro A_k de la señal a_n de longitud N si la entrelazamos con ceros en tiempo? Es decir generamos: $a_n^o = (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, 0, \dots, a_{N-1}, 0)$.

12. Dadas dos secuencias a_n y b_n de longitud N y sus transformadas discretas de Fourier A_k y B_k , si entrelazamos las secuencias dadas para formar una nueva secuencia c_n de longitud $2N$ del siguiente modo:

$$c_n = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}) \Leftrightarrow C_k$$

¿Qué expresiones podemos utilizar para hallar la transformada discreta de Fourier de la secuencia entrelazada C_k a partir de las transformadas discretas de Fourier A_k y B_k ?

13. Dada una señal x_n de longitud $N=1024$ ¿Cuántas operaciones habrá que hacer para calcular su transformada discreta de Fourier utilizando la expresión estándar

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

en comparación a la cantidad de operaciones que deberemos hacer

utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT) que surge de las expresiones de la pregunta anterior?

14. Dada una secuencia x_n y su transformada discreta de Fourier X_k ambas de longitud N ¿De qué manera podemos interpolar una muestra por medio en tiempo, operando en el dominio de las frecuencias?

15. ¿Qué sucederá con la transformada discreta de Fourier o espectro de frecuencias, si “decimamos” (diezmamos) el dato eliminando una muestra por medio en tiempo?

16. Dada una secuencia x_n de longitud N ¿De qué manera puedo evaluar la transformada discreta de Fourier en $M > N$ frecuencias equidistantes entre 0 y 2π ?

17. Expresa la transformada discreta de Fourier inversa y directa en forma matricial. ¿Qué sucede con estas expresiones cuando las muestras en tiempo no fueron tomadas de manera regular o equidistante?

18. Si los datos no fueron tomados con un intervalo de muestreo regular. ¿De qué manera se podrían regularizar los datos en el dominio del tiempo?