

Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 7

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

1. ¿Cuáles son las transformadas de Fourier directa e inversa, o análisis y síntesis, de las siguientes señales?
- Una señal definida en dominios continuos, tanto en tiempo como en frecuencia.
 - Una señal definida en un dominio continuo de los tiempos, periódica de período T.
 - Una señal definida en un dominio continuo de las frecuencias, periódica de período 2π .
 - Una señal discreta y periódica en ambos dominios, tanto en tiempo como en frecuencia.

a) Transformada integral de Fourier:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$

b) Desarrollo en series de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt$$
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$$

c) Desarrollo en series de Fourier intercambiando roles de tiempo y frecuencia:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n}$$
$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

d) Transformada discreta de Fourier:

$$X_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k \cdot n}$$
$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k \cdot n}$$

2. Se define a la función peine en tiempo o función de muestreo, como una secuencia infinita de deltas de Dirac regularmente espaciados:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

¿Cuál es la transformada integral de Fourier de esta función peine en tiempo?

La función peine es un función periódica de período Δt , por lo tanto puede ser desarrollada en series de Fourier. Si calculamos los coeficientes de Fourier obtenemos:

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) e^{-i\frac{2\pi}{\Delta t}kt} dt = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{para todo } k = -\infty, \infty$$

Por lo tanto su transformada integral de Fourier está dada por:

$$P(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t} k\right) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t} k\right)$$

Es decir que la transformada integral de Fourier de la función peine en tiempo de período Δt , es otra función peine en frecuencia de período $\frac{2\pi}{\Delta t}$ escalada por $\frac{2\pi}{\Delta t}$.

3. Se define a la función peine en frecuencia, como una secuencia infinita de deltas de Dirac regularmente espaciados en frecuencia:

$$Q(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \Delta\Omega)$$

¿Cuál es la transformada integral inversa de Fourier de esta función peine en frecuencia?

Aplicando la propiedad de simetría $\frac{1}{2\pi} P(t) = p(-\Omega)$ a la transformada de Fourier de la función peine en tiempo, obtenemos la respuesta en tiempo de la función peine en frecuencia:

$$q(t) = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{\Delta\Omega} n\right)$$

Es decir que la transformada integral de Fourier inversa de una función peine en frecuencia de período $\Delta\Omega$, es otra función peine en tiempo de período $\frac{2\pi}{\Delta\Omega}$ escalada por $\frac{1}{\Delta\Omega}$.

4. Considere una función discreta en tiempo f_n^{PB} , continua y periódica en frecuencia, de período 2π , con respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega) = 1$ si $-\omega_c < \omega < \omega_c < \pi$ y $F^{PB}(\omega) = 0$ si $-\pi < \omega < -\omega_c$ y $\omega_c < \omega < \pi$. Esta respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega)$ es una función cajón de ancho $2\omega_c$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, fuera de este intervalo se extiende a infinita y periódica. Su respuesta impulsiva f_n^{PB} es la de un filtro pasa-bajos ideal, de longitud infinita, con frecuencia de corte ω_c .
¿Cuál es su transformada inversa de Fourier f_n^{PB} ?

Como $F^{PB}(\omega)$ es una función periódica en frecuencia de período 2π , podemos intercambiar los roles de tiempo y frecuencia y utilizar la expresión de los coeficientes de Fourier para calcular la respuesta impulsiva f_n^{PB} del filtro pasa-bajos ideal:

$$f_n^{PB} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega n}}{in} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$$

$$f_n^{PB} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad \text{para } n = -\infty, \infty$$

Es decir que la respuesta impulsiva de un filtro pasa-bajos ideal es un seno cardinal de

amplitud $\frac{\omega_c}{\pi}$ y frecuencia ω_c . Una vez encontrada la respuesta impulsiva f_n^{PB} podríamos desarrollar en series de Fourier la respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega)$ del filtro pasa-bajos ideal del siguiente modo:

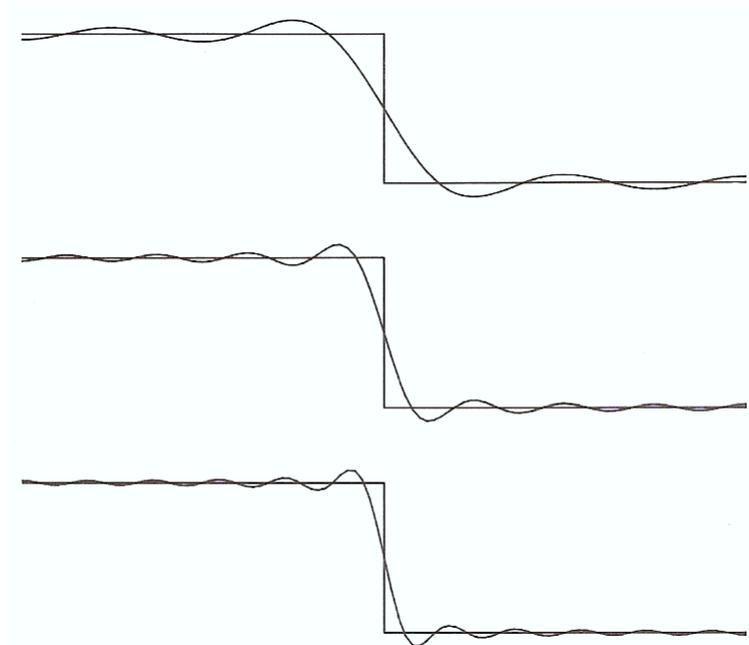
$$F^{PB}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{PB} e^{-i\omega n}$$

5. Truncamos la respuesta impulsiva infinita f_n^{PB} del filtro pasa-bajos ideal de la pregunta anterior entre $-N < n < N$ para obtener \hat{f}_n^{PB} ¿En qué difieren la respuesta en frecuencia $F^{PB}(\omega)$ del filtro ideal y la respuesta en frecuencia $\hat{F}^{PB}(\omega)$ de la respuesta impulsiva truncada \hat{f}_n^{PB} ?

La respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajos truncado será:

$$\hat{F}^{PB}(\omega) = \sum_{n=-N}^N f_n^{PB} e^{-i\omega n}$$

A continuación podemos observar las respuestas en frecuencias $F^{PB}(\omega)$ y $\hat{F}^{PB}(\omega)$ para tres longitudes $2N+1$ igual a 13, 29 y 41, entre las frecuencias 0 y π :



A medida que la respuesta impulsiva se trunca en tiempo a una longitud mayor, la respuesta en frecuencia del filtro truncado se ajusta cada vez mejor a la respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajos ideal. Mientras que en la discontinuidad $\omega = \omega_c$, el desarrollo en series de Fourier converge al valor medio del límite por derecha y del límite por izquierda en la discontinuidad, es decir converge a $\hat{F}^{PB}(\omega_c) = 0,5$. Además podemos observar que el número de extremos relativos entre $-\pi$ y π , o picos y valles, es igual a $2N+1$. Truncar en tiempo con una función cajón es equivalente a convolucionar en frecuencia por un seno cardinal, las ondulaciones (rizado o ripple) que observamos en $\hat{F}^{PB}(\omega)$ son consecuencia de la convolución de $F^{PB}(\omega)$ con el seno cardinal.

6. ¿Por qué decimos que la respuesta impulsiva truncada \hat{f}_n de longitud $2N+1$ es óptima en el sentido de los cuadrados mínimos?

Si planteamos la siguiente función objetiva a minimizar:

$$\theta(\hat{f}_n^{CM}) = \int_{-\pi}^{\pi} (F^{PB}(\omega) - \hat{F}^{CM}(\omega))^2 d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left(F^{PB}(\omega) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n^{CM} e^{-i\omega n} \right)^2 d\omega = \text{mínimo}$$

donde \hat{f}_n^{CM} son los coeficientes de la respuesta impulsiva de un filtro óptimo según el criterio de los cuadrados mínimos. Derivamos $\theta(\hat{f}_n^{CM})$ respecto de los coeficientes \hat{f}_n^{CM} $n = -N, N$, y obtenemos un sistema de $2N+1$ ecuaciones normales donde los coeficientes \hat{f}_n^{CM} son nuestras incógnitas. Al solucionar este sistema se encuentra que $\hat{f}_n^{CM} = f_n^{PB}$ para $n = -N, N$, esta es la razón por la cual se dice que la respuesta impulsiva truncada $\hat{f}_n^{PB} = f_n^{PB}$, $n = -N, N$, es óptima según el criterio de los cuadrados mínimos.

7. ¿Explique qué es el fenómeno Gibbs y de qué manera puede ser atenuado?

En los gráficos incluidos en la respuesta de la pregunta número 5, podemos observar que la máxima separación entre la respuesta en frecuencia del filtro ideal deseado y la respuesta en frecuencia del filtro truncado, se produce en el pico próximo a la discontinuidad presente en $\omega = \omega_c$. El valor máximo de esta diferencia permanece prácticamente constante a pesar de que agreguemos más y más términos al cálculo de $\hat{F}^{PB}(\omega)$. Se puede demostrar que esta diferencia se aproxima a un valor constante igual al 8.9% del salto en la discontinuidad a medida que el número de términos de la suma parcial tiende a un valor grande. Este comportamiento está en conflicto con el resultado intuitivamente esperado. Es natural esperar que la diferencia tienda a cero a medida que aumentamos el número de términos, pero eso no es lo que ocurre. Este comportamiento inesperado de la convergencia fue observado a finales del siglo XIX y lo primero que se pensó fue que existía un error de cálculo. Sin embargo en 1899 el químico, físico y matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs fue el primero en explicar la verdadera naturaleza de la convergencia por lo cual este fenómeno es conocido como fenómeno de Gibbs.

A medida que agregamos términos a la suma parcial, la integral de las diferencias al cuadrado decrece uniformemente, el *ripple* (ondulación o rizado) del fenómeno de Gibbs oscila más rápidamente y se desplaza hacia la discontinuidad disminuyendo el área entre las dos curvas, pero la amplitud máxima del *ripple* no disminuye. Es decir que no es posible obtener la respuesta ideal deseada con un número finito de coeficientes.

La única manera de atenuar este fenómeno es diseñando un filtro menos selectivo, uno que tenga una zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo.

8. En la página de la materia puede encontrar un apunte en el que se explica cuales son las consecuencias de discretizar una señal analógica:

http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/senales/apuntes/Consecuencias_de_Discretizar.pdf

Lea el apunte y respóndase las siguientes preguntas:

- ¿Qué condición debe cumplir una señal analógica para poder ser discretizada?
- ¿Cuál es la consecuencia en frecuencia de discretizar en el dominio del tiempo?
- ¿Qué es el aliasing en frecuencia y de qué manera se puede evitar?
- ¿Por qué se produce la pérdida de resolución en frecuencia y de qué manera se puede atenuar?
- ¿Qué es el “leakage”, pérdida o fuga? ¿De qué maneras se puede minimizar?

- f) ¿Cuál es la consecuencia en tiempo de discretizar en frecuencia?
 g) ¿Que es el aliasing en tiempo y de qué manera se puede evitar?

9. ¿Qué sucederá con las frecuencias angulares $\Omega_{max}^{(\Delta t)}$, $\Omega_N^{(\Delta t)}$ y $\Omega_M^{(\Delta t)}$, si cambiamos el intervalo de muestreo Δt por $\Delta t/2$?

Cualquier frecuencia angular genérica $\Omega^{(\Delta t)}$ presente en la señal no cambiará al modificar el intervalo de muestreo, es decir $\Omega^{(\Delta t)} = \Omega^{(\Delta t/2)}$, en particular esto sucederá con la frecuencia angular máxima contenida en la señal $\Omega_{max}^{(\Delta t)} = \Omega_{max}^{(\Delta t/2)}$. Sin embargo, las frecuencias de muestro y de Nyquist sí cambiarán al modificar el intervalo de muestreo:

$\Omega_M^{(\Delta t)} = \frac{2\pi}{\Delta t} = \Omega_M^{(\Delta t/2)}/2$ y $\Omega_N^{(\Delta t)} = \frac{\pi}{\Delta t} = \Omega_N^{(\Delta t/2)}/2$. Es decir que al disminuir el intervalo de muestreo a la mitad, las frecuencias de Nyquist y de muestreo se duplican:

$$\Omega_N^{(\Delta t/2)} = 2 \times \Omega_N^{(\Delta t)} \quad \text{y} \quad \Omega_M^{(\Delta t/2)} = 2 \times \Omega_M^{(\Delta t)}$$

Al disminuir el intervalo de muestreo la distancia $\frac{2\pi}{\Delta t}$ entre las réplicas del espectro, en el dominio de las frecuencias angulares, aumenta.

10. ¿Qué sucederá con las frecuencias angulares digitales $\omega_{max}^{(\Delta t)}$, $\omega_N^{(\Delta t)}$ y $\omega_M^{(\Delta t)}$, si cambiamos el intervalo de muestreo Δt por $\Delta t/2$?

Se define a la frecuencia angular digital como el producto de la frecuencia angular por el intervalo de muestreo:

$$\omega = \Omega \Delta t$$

En consecuencia las frecuencias angulares digitales de muestreo y de Nyquist serán constantes e independientes del intervalo de muestreo utilizado:

$$\omega_M^{(\Delta t)} = \Omega_M^{(\Delta t)} \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta t} \Delta t = 2\pi = \omega_M^{(\Delta t/2)}$$

$$\omega_N^{(\Delta t)} = \Omega_N^{(\Delta t)} \Delta t = \frac{\pi}{\Delta t} \Delta t = \pi = \omega_N^{(\Delta t/2)}$$

Sin embargo una frecuencia angular digital genérica ω presente en la señal sí cambiará su valor al cambiar el intervalo de muestreo $\omega^{(\Delta t/2)} = \omega^{(\Delta t)}/2$, en particular la frecuencia angular digital máxima presente en la señal cambiará su valor:

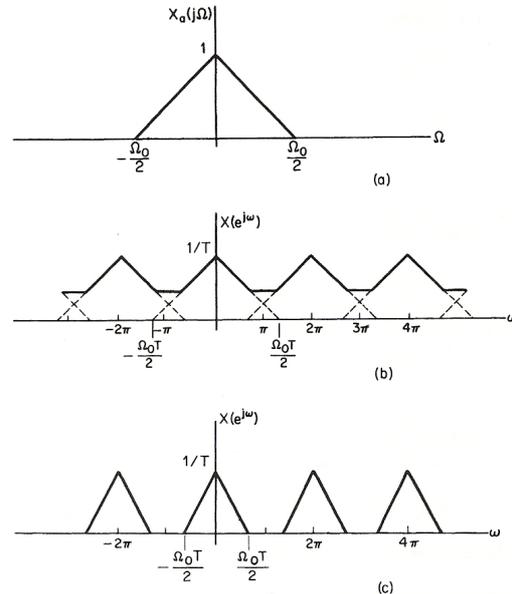
$$\omega_{max}^{(\Delta t)} = \Omega_{max}^{(\Delta t)} \Delta t = \Omega_{max} \Delta t \neq \omega_{max}^{(\Delta t/2)} = \Omega_{max}^{(\Delta t/2)} \frac{\Delta t}{2} = \Omega_{max} \frac{\Delta t}{2} = \omega_{max}^{(\Delta t)}/2$$

$$\omega_{max}^{(\Delta t/2)} = \frac{\omega_{max}^{(\Delta t)}}{2}$$

Al disminuir el intervalo de muestreo, en el dominio de las frecuencias angulares digitales la distancia entre réplicas se mantiene constante e igual a 2π , sin embargo el ancho del espectro igual a $2\omega_{max}$ disminuye, es decir, al disminuir el intervalo de muestreo el espectro de

frecuencias angulares digitales se comprime.

En los siguientes gráficos tomados del Karl se ven las consecuencias en el dominio de las frecuencias angulares digitales ω de disminuir el intervalo de muestreo a la mitad, T es el intervalo de muestreo y $\frac{\Omega_0}{2} = \Omega_{max}$:



11. ¿Qué sucederá con el espectro A_k de la señal a_n de longitud N si la entrelazamos ceros en tiempo? Es decir generamos: $a_n^o = (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, 0, \dots, a_{N-1}, 0)$.

Al entrelazar ceros en tiempo estaremos disminuyendo el intervalo de muestreo a la mitad, el valor numérico de las amplitudes del espectro no se modificará, solo cambiará el valor de frecuencia angular digital ω al que es asignada la amplitud calculada, es decir se comprimirá el espectro. Además de comprimirse, se producirá una repetición del espectro comprimido en un intervalo de longitud 2π , ya sea entre $-\pi$ y π , o entre 0 y 2π .

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i\omega n} \Rightarrow A^o(\omega) = \sum_{n=0}^{2N-1} a_n^o e^{-i\omega n} \Rightarrow A^o\left(\frac{\omega}{2}\right) = A(\omega)$$

Donde:

$$a_n^o = 0 \text{ si } n \text{ es impar}$$

$$a_n^o = a_{n/2} \text{ si } n \text{ es cero o par}$$

12. Dadas dos secuencias a_n y b_n de longitud N y sus transformadas discretas de Fourier A_k y B_k , si entrelazamos las secuencias dadas para formar una nueva secuencia c_n de longitud $2N$ del siguiente modo:

$$c_n = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}) \Leftrightarrow C_k$$

¿Qué expresiones podemos utilizar para hallar la transformada discreta de Fourier de la secuencia entrelazada C_k a partir de las transformadas discretas de Fourier A_k y B_k ?

Generemos dos nuevas secuencias de longitud $2N$ con ceros entrelazados y sumémoslas:

$$a_n^o = (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, 0, \dots, a_{N-1}, 0)$$

$$b_n^o = (0, b_0, 0, b_1, 0, b_2, 0, b_3, 0, b_4, 0, \dots, 0, b_{N-1})$$

$$c_n = a_n^o + b_n^o = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_{N-1}, b_{N-1})$$

Observemos que a la secuencia b_n^o además de entrelazarle ceros, lo que equivale a comprimir el espectro y generar una repetición, la estamos retardando en media muestra, lo cual en el dominio de la transformada Z es equivalente a multiplicar por $Z^{\frac{1}{2}}$, o en el dominio de las frecuencias angulares digitales es equivalente a multiplicar por $e^{-i\frac{\omega}{2}}$ o por $e^{-i\frac{\pi}{N}k}$ en el dominio de las frecuencias angulares digitales discretas. Es decir que estamos aplicando un corrimiento lineal de la fase $\Delta\phi = \frac{1}{2}\omega$, que vale 0 para $\omega=0$ y $\pi/2$ para $\omega=\pi$.

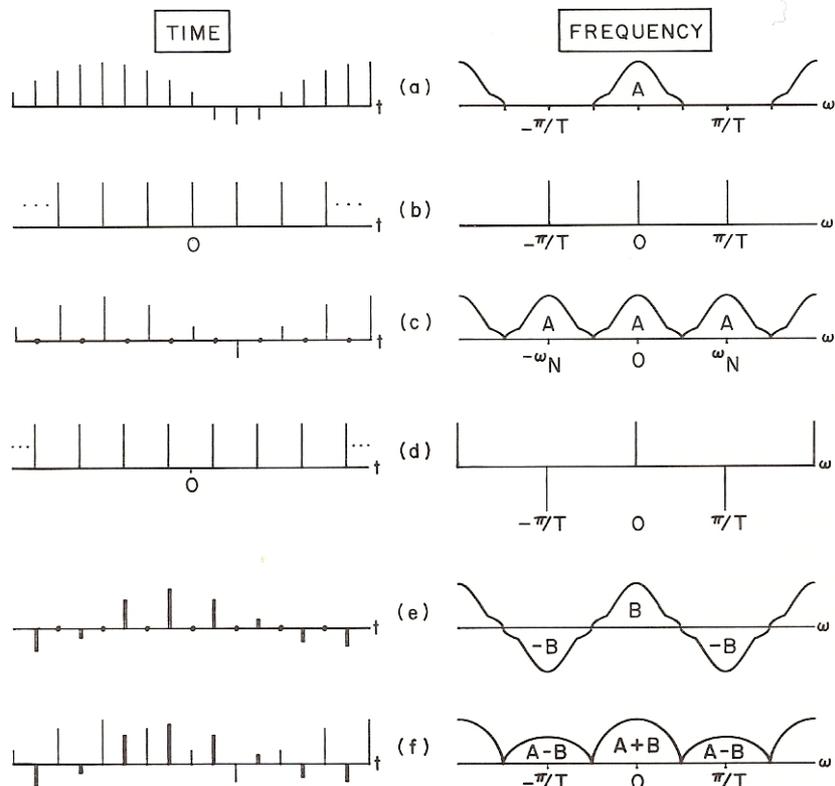
Un cambio de fase igual a π es equivalente a un cambio de polaridad.

Se puede demostrar que C_k se puede obtener a partir de las siguientes expresiones conociendo A_k y B_k :

$$C_k = A_k + e^{-i\frac{\pi}{N}k} B_k \quad \text{para } k=0, N-1$$

$$C_k = A_{k-N} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} B_{k-N} \quad \text{para } k=N, 2N-1$$

Las siguientes figuras muestran las consecuencias en frecuencia de lo hecho en tiempo:



Observe que la figura (a) muestra la secuencia a_n como si hubiera sido muestreada con un intervalo de muestreo $\Delta t/2$, ninguna figura muestra la secuencia b_n con un intervalo de muestreo $\Delta t/2$. La figura (c) muestra la consecuencia en frecuencia de entrelazar ceros en tiempo a la secuencia a_n . La figura (e) muestra la consecuencia en frecuencia de entrelazar ceros en tiempo y retardar media muestra a la secuencia b_n . Mientras que la figura (f) muestra la consecuencia en frecuencia de entrelazar en tiempo las secuencias a_n y b_n para obtener la secuencia c_n .

13. Dada una señal x_n de longitud $N=1024$ ¿Cuántas operaciones habrá que hacer para calcular su transformada discreta de Fourier utilizando la expresión estándar

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

en comparación a la cantidad de operaciones que deberemos hacer

utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT) que surge de las expresiones de la pregunta anterior?

Consideremos una señal de longitud $N=4$: $x_n = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

Hagamos la operación inversa a entrelazar, es decir desentrelazar.

Primero desentrelazamos una vez para obtener dos secuencias de longitud $N=2$:

$$(x_0, x_2) \text{ y } (x_1, x_3)$$

Si desentrelazamos nuevamente obtenemos cuatro secuencias de longitud $N=1$:

$$(x_0), (x_2), (x_1) \text{ y } (x_3)$$

La transformada de Fourier de una secuencia de longitud uno es la misma secuencia:

$$(x_0) \Leftrightarrow (X_0) = (x_0), (x_2) \Leftrightarrow (X_2) = (x_2), (x_1) \Leftrightarrow (X_1) = (x_1) \text{ y } (x_3) \Leftrightarrow (X_3) = (x_3)$$

Ahora podemos calcular las transformadas de Fourier de las secuencias de longitud $N=2$ utilizando las expresiones de la pregunta anterior. Una vez obtenidas las dos transformadas de Fourier de las secuencias de longitud $N=2$ podemos volver a usar las expresiones de la pregunta anterior para obtener la transformada de Fourier de la secuencia de longitud

$N=4$. Esta manera de calcular la transformada de Fourier requiere una cantidad de operaciones menor que si utilizáramos la expresión estándar para su cálculo, y es conocida como transformada rápida de Fourier (FFT).

En general, dada una secuencia de longitud N la cantidad de operaciones necesarias para calcular la transformada de Fourier con la expresión estándar es proporcional a $N \times N$ mientras que si utilizamos la FFT la cantidad de operaciones será proporcional a

$$\log_2(N) \times N$$

Para el caso particular de $N=1024$ tendremos $N \times N = 1.048.576$ y

$\log_2(N) \times N = 10240$, es decir que la FFT en este caso será 102.4 veces más rápida que la transformada estándar. La única limitación en este procedimiento es que la longitud de la secuencia N debe ser una potencia de 2, pero eso no es un problema, porque si no es potencia de 2 le agregamos ceros en la cola (*zero padding*) hasta alcanzar la longitud requerida, y aun así seguirá siendo mucho más rápida que la transformada estándar.

14. Dada una secuencia x_n y su transformada discreta de Fourier X_k ambas de longitud N ¿De qué manera podemos interpolar una muestra por medio en tiempo, operando en el dominio de las frecuencias?

Consideremos una señal $x_n^{(1)}$, $n=0,12$ es decir una señal de longitud $N=13$, con una transformada de Fourier $X_k^{(1)}$, $\omega_k^{(1)} = \frac{2\pi}{13} k$, $k=0,12$, es decir que estamos tomando

13 muestras en frecuencia entre 0 y 2π . Entre 0 y π o ($k=0,6$) , muestreamos la segunda mitad del espectro, el correspondiente a las frecuencias positivas. Entre π y 2π o ($k=7,12$) , muestreamos la primera mitad del espectro correspondiente a frecuencias negativas, lo cual es equivalente a muestrear entre $-\pi$ y 0 ya que el espectro de frecuencias es periódico de período 2π . El intervalo de muestreo original $\Delta t^{(1)}$ fue elegido para satisfacer el teorema de Nyquist-Shannon, es decir que $\omega_{max} < \pi$.

Si hubiéramos muestreado el mismo intervalo de tiempo con un intervalo de muestreo igual a la mitad del utilizado $\Delta t^{(2)} = \Delta t^{(1)}/2$, hubiéramos obtenido $x^{(2)}_n$, $n=0,25$, es decir una señal de longitud $N=26$, con una transformada de Fourier $X^{(2)}_k$, $\omega^{(2)}_k = \frac{2\pi}{26}k$, $k=0,25$.

La relación entre los espectros en frecuencias de las dos secuencias será la siguiente:

$\Delta t^{(2)} = \Delta t^{(1)}/2$	$\Delta t^{(1)}$	
$\omega^{(2)}_0$	$X^{(2)}_0 = 2 X^{(1)}_0$	$\rightarrow \omega^{(1)}_0 = 2 \omega^{(2)}_0 \quad X^{(1)}_0 \quad \omega^{(1)}_0 = \omega^{(2)}_0 = 0$
$\omega^{(2)}_1$	$X^{(2)}_1 = 2 X^{(1)}_1$	$\rightarrow \omega^{(1)}_1 = 2 \omega^{(2)}_1 \quad X^{(1)}_1$
$\omega^{(2)}_2$	$X^{(2)}_2 = 2 X^{(1)}_2$	$\rightarrow \omega^{(1)}_2 = 2 \omega^{(2)}_2 \quad X^{(1)}_2$
$\omega^{(2)}_3$	$X^{(2)}_3 = 2 X^{(1)}_3$	$\rightarrow \omega^{(1)}_3 = 2 \omega^{(2)}_3 \quad X^{(1)}_3$
$\omega^{(2)}_4$	$X^{(2)}_4 = 2 X^{(1)}_4$	$\rightarrow \omega^{(1)}_4 = 2 \omega^{(2)}_4 \quad X^{(1)}_4$
$\omega^{(2)}_5$	$X^{(2)}_5 = 2 X^{(1)}_5$	$\rightarrow \omega^{(1)}_5 = 2 \omega^{(2)}_5 \quad X^{(1)}_5$
$\omega^{(2)}_6$	$X^{(2)}_6 = 2 X^{(1)}_6$	$\rightarrow \omega^{(1)}_6 = 2 \omega^{(2)}_6 \quad X^{(1)}_6$
$\omega^{(2)}_7$	$X^{(2)}_7 = 0$	
$\omega^{(2)}_8$	$X^{(2)}_8 = 0$	
$\omega^{(2)}_9$	$X^{(2)}_9 = 0$	
$\omega^{(2)}_{10}$	$X^{(2)}_{10} = 0$	
$\omega^{(2)}_{11}$	$X^{(2)}_{11} = 0$	
$\omega^{(2)}_{12}$	$X^{(2)}_{12} = 0$	
$\omega^{(2)}_{13} = \pi$	$X^{(2)}_{13} = 0$	
$\omega^{(2)}_{14}$	$X^{(2)}_{14} = 0$	
$\omega^{(2)}_{15}$	$X^{(2)}_{15} = 0$	
$\omega^{(2)}_{16}$	$X^{(2)}_{16} = 0$	
$\omega^{(2)}_{17}$	$X^{(2)}_{17} = 0$	
$\omega^{(2)}_{18}$	$X^{(2)}_{18} = 0$	
$\omega^{(2)}_{19}$	$X^{(2)}_{19} = 0$	
$\omega^{(2)}_{20}$	$X^{(2)}_{20} = 2 X^{(1)}_7$	$\rightarrow \omega^{(1)}_7 = 2 \omega^{(2)}_{20} \quad X^{(1)}_7$
$\omega^{(2)}_{21}$	$X^{(2)}_{21} = 2 X^{(1)}_8$	$\rightarrow \omega^{(1)}_8 = 2 \omega^{(2)}_{21} \quad X^{(1)}_8$
$\omega^{(2)}_{22}$	$X^{(2)}_{22} = 2 X^{(1)}_9$	$\rightarrow \omega^{(1)}_9 = 2 \omega^{(2)}_{22} \quad X^{(1)}_9$
$\omega^{(2)}_{23}$	$X^{(2)}_{23} = 2 X^{(1)}_{10}$	$\rightarrow \omega^{(1)}_{10} = 2 \omega^{(2)}_{23} \quad X^{(1)}_{10}$
$\omega^{(2)}_{24}$	$X^{(2)}_{24} = 2 X^{(1)}_{11}$	$\rightarrow \omega^{(1)}_{11} = 2 \omega^{(2)}_{24} \quad X^{(1)}_{11}$
$\omega^{(2)}_{25}$	$X^{(2)}_{25} = 2 X^{(1)}_{12}$	$\rightarrow \omega^{(1)}_{12} = 2 \omega^{(2)}_{25} \quad X^{(1)}_{12}$

Es decir que la consecuencia en el dominio de las frecuencias de disminuir el intervalo de

muestreo en tiempo a la mitad, es la multiplicar el espectro por 2, y la de comprimir el espectro. Esto último lo logramos agregando $N=13$ ceros en π , es decir entre las muestras $X_6^{(1)}$ y $X_7^{(1)}$.

En general, dada una secuencia x_n de longitud N para interpolar una muestra por medio debemos ir al dominio discreto de las frecuencias X_k multiplicarlo por dos: $2X_k$ y agregar N ceros entre $2X_{\frac{(N-1)}{2}}$ y $2X_{\frac{(N+1)}{2}}$ luego antitransformar y obtenemos la señal en tiempo con una muestra por medio interpolada. El factor 2 aparece porque cuando discretizamos en tiempo introducimos un factor $\frac{1}{\Delta t}$ en frecuencia, como estamos disminuyendo el intervalo de muestreo a la mitad debemos introducir un factor 2. Si N es par la solución más sencilla es agregar un cero en la cola de la secuencia original para hacer impar su longitud.

15. ¿Qué sucederá con la transformada discreta de Fourier o espectro de frecuencias, si “decimamos” (diezmamos) el dato eliminando una muestra por medio en tiempo?

Sucedirá exactamente lo opuesto a lo que describimos en la pregunta anterior, los espectros de frecuencia en vez de comprimirse, se expandirán y si la señal no fue sobremuestreada, entonces las réplicas de los espectros de frecuencia se solaparán.

Una señal sobremuestreada es aquella que se discretizó con un intervalo de muestreo menor al impuesto por el criterio de Nyquist-Shannon. En este caso para evitar el aliasing al decimar deberíamos haber muestreado con un intervalo de muestreo menor a la mitad del impuesto por el teorema de muestreo.

Otra manera de evitar el solapamiento, es aplicando un filtro pasa bajos, en este contexto denominado filtro antialias, que elimine las altas frecuencias que se solaparán al decimar. Obviamente esto implica una pérdida de información de alta frecuencia, es decir, una pérdida de resolución temporal.

16. Dada una secuencia x_n de longitud N ¿De qué manera puedo evaluar la transformada discreta de Fourier en $M > N$ frecuencias equidistantes entre 0 y 2π .

Dada una secuencia x_n de longitud N , habitualmente evaluamos la transformada de Fourier en la misma cantidad de puntos que tenemos en tiempo, es decir en N frecuencias. La forma más simple de evaluar la transformada de Fourier en una cantidad de frecuencias $M > N$ es agregando ceros a la secuencia x_n en la cola hasta alcanzar la longitud M (*zero padding*) antes de calcular la transformada.

17. Exprese la transformada discreta de Fourier inversa y directa en forma matricial. ¿Qué sucede con estas expresiones cuando las muestras en tiempo no fueron tomadas de manera regular o equidistante?

Definamos la matriz cuadrada $F_{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$, $k=0, N-1$ y $n=0, N-1$,

de orden N .

Y definamos los vectores columna $x^T = (x_0 x_1 x_2 \cdots x_{N-1})$ y $X^T = (X_0 X_1 X_2 \cdots X_{N-1})$

Utilizando esta matriz y estos vectores, podemos escribir la transformada discreta de Fourier inversa y directa en forma matricial, de la siguiente manera:

$$F X = x$$

$$F^H x = X$$

Como F es una matriz ortonormal su inversa es igual a la matriz hermitiana o transpuesta conjugada $F^{T*} F = F^H F = I$.

18. Si los datos no fueron tomados con un intervalo de muestreo regular. ¿De qué manera se podrían regularizar los datos en el dominio del tiempo?

Si las muestras en tiempo no fueron tomadas de manera equidistante la matriz F deja de ser ortogonal, y para encontrar la inversa ya no podemos tomar la hermitiana sino que debemos invertirla, esto no es inmediato sino que hay que tomar ciertos recaudos para que $X_k = X_{-k}^*$ siga siendo hermitiana y x_n siga siendo real. Una vez hallado el vector X con valores regularmente dispuestos en frecuencia, es posible antitransformar y obtener una versión del vector x en tiempo con valores regularmente dispuesto, este procedimiento habitualmente se denomina regularización de datos.

En esta materia estamos trabajando con datos que son función de una única variable independiente, genéricamente el tiempo, pero la transformada de Fourier se puede generalizar a N dimensiones. Análogamente es posible generalizar este método de regularización a N dimensiones. Por ejemplo las observaciones de gravedad nunca se realizan en puntos regularmente dispuestos sobre la superficie del terreno, sino que observamos donde nos es posible acceder, sin embargo para trabajar numéricamente con los datos debemos regularizarlos, es decir asignarlos a los nodos de una grilla o retícula regular mediante algún método de regularización 2D.

Análogamente los datos de sísmica de superficie son datos que dependen de 5 variables independientes, en este caso se utilizan métodos de regularización 5D en el dominio de Fourier.

Otros métodos de regularización/interpolación son los geoestadísticos que estudiaremos en la clase 15.