Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 6

Muestreo de una Señal Analógica

1. ¿Qué relación existe entre la transformada integral de Fourier $X_a(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-i\Omega t}dt$ de una señal analógica $x_a(t)$ y la transformada de Fourier (o respuesta en frecuencia) $X(\omega=\Omega\,\Delta t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n}$ de la señal analógica discretizada $x_n=x_a(t=n\,\Delta t)$?

   Cuando una señal $x_a(t)$ es real en tiempo, entonces su transformada integral de Fourier $X_a\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)$, es hermitiana en frecuencia: $X_a(\Omega)=X_a^*(-\Omega)$. Lo que es equivalente a decir que su espectro de amplitud es par $|X_a(\Omega)|=|X_a(-\Omega)|$ y su espectro de fase es impar $\varphi_{X_a}(\Omega)=-\varphi_{X_a}(-\Omega)$. En consecuencia, si la señal es de banda limitada y posee una frecuencia angular máxima Ω_{max} , tendrá una frecuencia angular mínima $\Omega_{min}=-\Omega_{max}$, y la transformada integral de Fourier valdrá $X_a(\Omega)=0$ para $-\Omega_{max}>\Omega>\Omega_{max}$.
   Es importante recordar que una condición necesaria para que una señal analógica pueda ser discretizada en tiempo es que sea de banda limitada en frecuencia.

   Se puede demostrar que la relación entre la transformada integral de Fourier de una señal analógica y la transformada de Fourier de la misma señal discretizada está dada por:
$$X(\omega)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t}-\frac{2\pi}{\Delta t}r\right)$$

   Es decir que la consecuencia de discretizar en tiempo con un intervalo de muestreo Δt es la de generar periodicidad en el dominio de las frecuencias, de período $\frac{2\pi}{\Delta t}$, y la introducción de un factor de escala $\frac{1}{\Delta t}$. Otra manera de decirlo es que, al discretizar en tiempo una señal de banda limitada $x_a(t)$ con un intervalo de muestreo Δt , introducimos en frecuencia un factor de escala $\frac{1}{\Delta t}$ y extendemos $X_a\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)$ a infinita y periódica de período $\frac{2\pi}{\Delta t}$.

2. ¿Qué dice el teorema de muestreo o teorema de Nyquist-Shannon?

   Consideremos una señal analógica $x_a(t)$ de banda limitada. Cuando discretizamos en tiempo y en consecuencia extendemos a infinita y periódica $X_a\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)$ con período $\frac{2\pi}{\Delta t}$, la distancia entre el centro del espectro original escalado $\frac{1}{\Delta t}X_a\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)$ correspondiente a $r=0$ y el centro de la primera réplica $\frac{1}{\Delta t}X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t}-\frac{2\pi}{\Delta t}\right)$

correspondiente a $r=1$, es igual al período en frecuencia $\frac{2\pi}{\Delta t}$. El punto medio entre ambas réplicas se encuentra en $\Omega=\frac{\pi}{\Delta t}$, es decir la mitad de la frecuencia angular de muestreo o frecuencia angular de Nyquist $\Omega_N=\frac{\Omega_M}{2}=\frac{\pi}{\Delta t}$. En consecuencia las réplicas adyacentes no se solaparán si se cumple la condición que: $\Omega_{max}<\Omega_N$. Cuando esta condición no se cumple y las réplicas vecinas se solapan decimos que se produce aliasing.

El teorema de muestreo o teorema de Nyquist-Shannon nos dice precisamente que la condición para que no se produzca aliasing es que la frecuencia máxima que contiene la señal debe ser menor que la frecuencia de Nyquist:

$$\Omega_{max}<\Omega_N=\frac{\pi}{\Delta t} \quad \text{o} \quad f_{max}<f_N=\frac{1}{2\Delta t}$$

O dicho de otra manera, para que no se produzca aliasing, debemos elegir el intervalo de muestreo Δt lo suficientemente pequeño para que satisfaga que:

$$\Delta t<\frac{\pi}{\Omega_{max}}=\frac{1}{2f_{max}}$$

3. ¿Qué relación existe entre el desarrollo en series de Fourier de una función periódica y su transformada integral de Fourier?

Propongamos la siguiente transformada integral de Fourier y calculemos su transformada integral de Fourier inversa para ver a qué señal corresponde en tiempo:

$$F(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\Omega-\Omega_o k) \quad \text{donde} \quad \delta(\Omega) \quad \text{es el delta de Dirac.}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\Omega-\Omega_o k)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_o k)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{i\Omega_o k t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$$

Esta última expresión no es más que el desarrollo en series de Fourier de una función $f(t)$ periódica de período T, donde los a_k no son más que los coeficientes de Fourier dados por:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-i\frac{2\pi}{T}k}\,dt$$

Es decir que $F(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\Omega-\Omega_o k)$ es la transformada integral de Fourier de la función $f(t)$ infinita y periódica de período T.
La transformada integral de Fourier $F(\Omega)$ es una secuencia infinita de deltas de Dirac retardados en múltiplos de la frecuencia fundamental $\Omega_o=\frac{2\pi}{T}$ y escalados por $2\pi a_k$.

4. ¿Cuál es la transformada integral de Fourier de una función cajón en tiempo?

$$f(t)=1 \quad \text{si} \quad -T<t<T \quad \text{y} \quad f(t)=0 \quad \text{si} \quad -T>t>T$$

La transformada integral de Fourier de una función cajón en tiempo de longitud $2T$ es un seno cardinal de amplitud $2T$:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\Omega)=2T\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega T}$$

Los primeros cruces por cero de este seno cardinal estarán en $\Omega=\pm\frac{\pi}{T}$.

5. ¿Por qué se produce la pérdida de resolución en frecuencia de una señal?

   Cuando observamos una señal en tiempo nunca lo hacemos entre $-\infty$ e $+\infty$, sino que lo hacemos en un intervalo finito de tiempo, desde un instante inicial hasta un instante final, lo cual equivale a multiplicar la señal en tiempo por una función cajón. Multiplicar en tiempo por una función cajón es equivalente a convolucionar en frecuencia por un seno cardinal. El efecto de convolucionar el espectro de frecuencias por un seno cardinal es el de suavizar el espectro, esta suavización produce un pérdida de resolución en frecuencia de la señal, la cual únicamente puede ser atenuada aumentando la longitud de la ventana de observación.
   A medida que la longitud de la ventana de observación en tiempo aumenta, el lóbulo central del seno cardinal se hace más angosto y más alto, mientras que disminuye la amplitud de los lóbulos laterales. En el límite, cuando la ventana de observación tiende a infinito, el seno cardinal tiende a una delta de Dirac. Convolucionar una señal con una delta de Dirac no le produce ninguna modificación.

6. Para una función cajón en tiempo. ¿Qué relación existe entre la longitud de la función en tiempo y el ancho de banda de su transformada de Fourier?

   En rigor un seno cardinal es de longitud infinita, sin embargo su amplitud se aproxima asintóticamente a cero a medida que nos alejamos de su lóbulo central, en algún momento la amplitud del seno cardinal será tan pequeña que estará por debajo del valor más pequeño que podemos guardar en el formato digital de grabación que estemos usando, es decir, que a los fines prácticos el seno cardinal es de longitud finita. Una manera arbitraria de cuantificar el ancho de un seno cardinal es la distancia entre sus cruces por cero $\Delta\Omega=\frac{2\pi}{T}$. La longitud de la función cajón en tiempo es de $\Delta\tau=2T$. El producto de las longitudes en uno y otro dominio es igual a una constante:

$$\Delta\tau\times\Delta\Omega=2T\frac{2\pi}{T}=4\pi$$

   Esto que se observa para el par transformado, función cajón $\Leftrightarrow$ seno cardinal, se puede observar en general para cualquier señal, cuanto más corta sea la señal en un dominio mayor será la longitud de la señal en el otro dominio.

7. ¿Cuál es la transformada integral de Fourier de una función cajón en frecuencia?

$$F(\Omega)=1 \quad \text{si} \quad -\Omega_o<\Omega<\Omega_o \quad \text{y} \quad F(\Omega)=0 \quad \text{si} \quad -\Omega_o>\Omega>\Omega_o$$

   La transformada integral de Fourier de una función cajón en frecuencia de longitud $2\Omega_o$

es un seno cardinal de amplitud $\frac{\Omega_o}{\pi}$ y primeros cruces por cero en $t=\pm\frac{\pi}{\Omega_o}$:

$$f(t)=\frac{\Omega_o}{\pi}\frac{\sin(\Omega_o t)}{\Omega_o t}\Leftrightarrow F(\Omega)$$

8. ¿Cómo es posible recuperar la señal analógica $x_a(t)$ a partir de la señal discretizada x_n utilizando interpolación seno cardinal? ¿Por qué nunca lograremos recuperar exactamente la función analógica original?

   Si multiplicamos en el dominio de las frecuencias la transformada de Fourier o respuesta en frecuencia $X(\omega)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a\left(\frac{\omega}{\Delta t}-\frac{2\pi}{\Delta t}r\right)$ de la señal discretizada x_n por una función cajón de amplitud Δt que valga $F\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)=\Delta t$ si $-\Omega_N=-\frac{\pi}{\Delta t}<\Omega<\frac{\pi}{\Delta t}=\Omega_N$ y $F\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)=0$ si $-\Omega_N=-\frac{\pi}{\Delta t}>\Omega>\frac{\pi}{\Delta t}=\Omega_N$, obtendremos:

$$X(\omega)F\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)=X_a\left(\Omega=\frac{\omega}{\Delta t}\right)$$

   Es decir la transformada integral de Fourier de la función analógica $x_a(t)$. Esto es así siempre y cuando hallamos elegido el intervalo de muestreo Δt según el criterio establecido por el teorema de Nyquist-Shannon.

   Podemos hacer esta operación en el dominio del tiempo convolucionando nuestra señal discreta x_n con la transformada integral inversa de la función cajón $F(\Omega)$:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta t}t)}{(\frac{\pi}{\Delta t}t)}\Leftrightarrow F(\Omega)$$

$$x_a(t)=x_n*\frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta t}t)}{(\frac{\pi}{\Delta t}t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\frac{\sin[\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)]}{[\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)]}$$

   Esta expresión se puede interpretar como una suma de senos cardinales retardados, escalados por los valores de las muestras asociadas a los correspondientes retardos.
   Esta expresión nos permitiría recuperar la señal analógica original si hubiéramos observado infinitos valores de x_n , pero como nuestra ventana de observación es siempre finita, en los extremos de la ventana no lograremos obtener los valores exactos de la función analógica, sólo obtendremos valores correctos cuando nos alejemos de los extremos de la ventana de observación una distancia lo suficientemente grande como para que los lóbulos laterales del seno cardinal alcancen valores despreciables.

9. ¿Qué es el aliasing en el dominio del tiempo o aliasing temporal? ¿Cómo podemos evitar que se produzca?

Análogamente a cuando discretizamos en el dominio del tiempo, al discretizar en el dominio de las frecuencias generamos periodicidad en tiempo, y si las replicas en tiempo no están alejadas en un tiempo mayor a su longitud en tiempo, estas se solaparán, es decir que para que no se produzca aliasing en tiempo debemos tomar una cantidad de muestras en frecuencia mayor o igual a la cantidad de muestras N que tenemos en tiempo, es decir:

$$\Delta\omega \leqslant \frac{2\pi}{N}$$

10. ¿Qué dice el teorema de “tiempo limitado-banda limitada”? ¿Por qué en la práctica este teorema no nos impone ninguna limitación?

En la práctica siempre que apliquemos la transformada discreta de Fourier la señal tendrá que ser de banda limitada para poder discretizarla y de longitud limitada para poder implementar la transformada discreta inversa evaluándola en número finito de puntos regularmente dispuestos sobre el círculo unidad.
Sin embargo el teorema de tiempo limitado-banda limitada nos dice que ninguna señal puede ser simultáneamente de tiempo limitado y de banda limitada, excepto el caso trivial cuando la señal es constante e igual a cero.
En la práctica veremos que las señales pueden tender asintóticamente a cero hasta alcanzar valores tan pequeños que están incluso por debajo del valor más pequeño que el formato digital de grabación que estemos utilizando nos permita guardar, por lo tanto a los fines prácticos podremos considerarlos nulos. El ejemplo típico es el seno cardinal el cual está definido con valores distintos a cero entre $-\infty$ y $+\infty$, sin embargo a partir de cierta distancia del lóbulo central el valor será tan pequeño que podremos considerarlo nulo.
Para que una señal tenga un espectro de frecuencias infinito debe presentar una discontinuidad, situación con la que habitualmente no nos encontramos.
Por otro lado, nuestra ventanas de observación siempre tienen cortes abruptos en sus extremos, estos cortes abruptos generan discontinuidades en tiempo y altos contenidos de frecuencias que en realidad no están presentes en la señal, para mitigar este efecto de borde se aplican rampas o “tapers” que suavizan los extremos de nuestras ventanas de observación.