Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 5

Transformada discreta de Fourier

Repasemos brevemente algunos de los conceptos que hemos aprendido hasta ahora. Cuando excitamos un sistema lineal e invariante (SLI) con una secuencia impulso unitario δ_n obtenemos lo que se denomina la respuesta impulsiva del SLI $h_n = S\{\delta_n\}$. Cuando excitamos un SLI con una señal $\boldsymbol{x_n}$, obtenemos en la salida del sistema el producto de convolución de la señal de entrada con la respuesta impulsiva del SLI: $y_n = S\{x_n\} = x_n * h_n = \sum_k x_k h_{n-k}$.

Definimos a la transformada Z de una secuencia $\boldsymbol{x_n}$ de longitud N , como el polinomio de grado $N-1$ en Z: $X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n Z^n$.

El teorema de convolución nos dice que: convolucionar en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar en el dominio de la transformada Z:

$$x_n * h_n \Leftrightarrow X(Z) H(Z)$$

Definimos a la respuesta en frecuencia $X(\omega)$, como la transformada Z evaluada sobre el círculo unidad, en $Z = e^{-i\omega}$, es decir $X(\omega) = X(Z = e^{-i\omega})$. Esta definición de la respuesta en frecuencia nos permitió expresar el teorema de convolución del siguiente modo: convolucionar en el dominio de los tiempos discretos es equivalente a multiplicar en el dominio de la respuesta en frecuencia:

$$x_n * h_n \Leftrightarrow X(\omega) H(\omega)$$

La respuesta en frecuencia N , es función definida en un dominio continuo, periódica, de período 2π . Interpretamos a la respuesta en frecuencia $X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-i\omega n}$ como la trasformada de Fourier de una secuencia discreta. Dado que la respuesta en frecuencia tiene la forma de un desarrollo en series de Fourier, su transformada inversa de Fourier está dada por la misma expresión que nos permite calcular los coeficientes de Fourier para una función periódica:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

Respondamos las siguientes preguntas correspondientes a temas de la clase 5:

1. ¿Cómo definimos la transformada discreta de Foutier?

   Dada la respuesta en frecuencia o transformada de Fourier $X(\omega)$ de una señal discreta $\boldsymbol{x_n}$ de longitud N , definimos a la transformada discreta de Fourier $\boldsymbol{X_k}$ de la señal discreta $\boldsymbol{x_n}$, como la respuesta en frecuencia $X(\omega)$ evaluada en N puntos regularmente dispuestos sobre el círculo unidad:

$$X_k = X\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N} k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N} k \cdot n} \qquad para \quad k = 0, N-1$$

Indicaremos de la siguiente manera que $\boldsymbol{X_k}$ es la transformada discreta de Fourier de la señal discreta $\boldsymbol{x_n}$:

$$\boldsymbol{x_n \Leftrightarrow X_k}$$

2. ¿Como definimos la transformada discreta inversa de Fourier?

Dada la transformada discreta de Fourier $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot n}$ multipliquemos ambos miembros por $e^{i\frac{2\pi}{N}k.m}$, sumemos sobre k , e intercambiemos el orden de las sumatorias:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot m} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot n} e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot m} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot(m-n)}$$

Haciendo uso de la relación de ortogonalidad de la transformada discreta de Fourier:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot(m-n)} = N\,\delta_{n,m}$$

Donde $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker, que vale 1 si $n=m$ o 0 si $n \neq m$, obtenemos una expresión simple que nos permite calcular los coeficientes x_n a partir de los valores X_k de la transformada discreta de Fourier:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot m} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot(m-n)} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot N \cdot \delta_{n,m} = x_m \cdot N$$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot n}$$

3. ¿Cómo expresa el teorema de corrimiento en fase en el dominio discreto de las frecuencias?

$$h_{n-n_o} \Leftrightarrow H_k e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot n_o} = |H_k| e^{i\left(\varphi_k - \frac{2\pi}{N}k\cdot n_o\right)}$$

4. ¿Cuál es la consecuencia en el dominio del tiempo, de discretizar en el dominio de las frecuencias?

La secuencia original $\boldsymbol{x_n}$ solo está definida para valores de $n=0, N-1$, sin embargo la secuencia que nos devuelve la transformada discreta inversa de Fourier:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}k.n} \qquad para \quad n=-\infty, \infty$$

es una secuencia infinita, periódica, de período N , que en su primer período coincide con la secuencia original. Esta periodicidad en tiempo se generó como consecuencia de discretizar $X(\omega)$ en N puntos equidistantes sobre el círculo unidad para obtener $\boldsymbol{X_k}$.

5. ¿Qué consecuencia tiene para el teorema de convolución el haber discretizado en el dominio de las frecuencias?

El teorema de convolución nos dice que convolucionar en el dominio discreto de los tiempos una secuencia $\boldsymbol{x_n}$ de longitud N , con otra secuencia $\boldsymbol{h_n}$ de longitud M , para obtener una secuencia $\boldsymbol{y_n}$ de longitud $N+M-1$, es equivalente a multiplicar en el dominio continuo de las frecuencias:

$$\boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{x_n} * \boldsymbol{h_n} \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

A esta convolución la llamaremos convolución lineal.
Sin embargo, al discretizar en el dominio de las frecuencias extendemos a infinitas y periódicas las secuencias en tiempo, en consecuencia multiplicar en el dominio discreto de las frecuencias es equivalente a convolucionar en el dominio discreto de los tiempos dos secuencias infinitas y periódicas, a esta convolución la llamaremos convolución circular.
Para lograr que la convolución circular nos dé en el dominio discreto de los tiempos, una secuencia infinita y periódica de período $N+M-1$, que en su primer período coincida con el resultado de la convolución lineal que deseamos calcular, lo que debemos hacer es agregar a las secuencias $\boldsymbol{x_n}$ y $\boldsymbol{h_n}$ tantos ceros en su cola antes de ir al dominio de Fourier, como sean necesarios para que ambas secuencias alcancen la longitud $N+M-1$, luego ir al dominio discreto de las frecuencias, hacer la multiplicación frecuencia a frecuencia $X_k \cdot H_k$, y al aplicar la transformada discreta inversa de Fourier, obtendremos una secuencia infinita periódica, de período $N+M-1$, que en su primer período coincidirá con el resultado de la convolución lineal que deseamos calcular:

$$\boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{x_n} * \boldsymbol{h_n} \Leftrightarrow Y_k = X_k \cdot H_k \quad para \quad k = 0, N+M-2$$

La convolución realizada como un producto en el dominio discreto de las frecuencias seguirá siendo una convolución circular, pero al agregar los ceros en la cola de ambas secuencias antes de ir al dominio de Fourier, lograremos que el resultado de la convolución circular coincida en su primer período con el resultado de la convolución lineal.

6. Dada una secuencia x_n ¿cómo se la puede descomponer como la suma de una secuencia par x_n^p más una secuencia impar x_n^i ?

   Toda secuencia x_n se puede descomponer como la suma de dos secuencias, una par y otra impar del siguiente modo:

$$x_n = x_n^p + x_n^i$$

$$x_n^p = \frac{x_n + x_{-n}}{2} = x_{-n}^p \quad y \quad x_n^i = \frac{x_n - x_{-n}}{2} = -x_{-n}^i$$

7. ¿Que sucede en el dominio de Fourier con la componente par y con la componente impar de una señal?

   Tomando transformada de Fourier a las expresiones obtenidas en la pregunta anterior se puede ver que:

$$\boldsymbol{x_n} \Leftrightarrow \boldsymbol{X_k}$$
$$\boldsymbol{x_n^p} \Leftrightarrow \Re[\boldsymbol{X_k}]$$
$$\boldsymbol{x_n^i} \Leftrightarrow \Im[\boldsymbol{X_k}]$$

   La transformada de Fourier de una señal par es real y la transformada de Fourier de una señal impar es imaginaria pura.

8. ¿Qué propiedad debe cumplir en el dominio de Fourier una señal que es real en el dominio del tiempo?

Dada la transformada discreta de Fourier de una secuencia x_n :

$$X_k=\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot n}$$

Tomemos a esta expresión el complejo conjugado:

$$X_k^*=\sum_{n=0}^{N-1} x_n^* e^{i\frac{2\pi}{N}k\cdot n}$$

Hagamos el cambio de variables k por -j:

$$X_{-j}^*=\sum_{n=0}^{N-1} x_n^* e^{-i\frac{2\pi}{N}j\cdot n}=X_j^*$$

Si x_n es una secuencia real entonces $x_n=x_n^*$, en consecuencia su transformada de Fourier deberá cumplir:

$$X_k=X_{-k}^*$$

Cuando una función cumple con esta igualdad se dice que es una función hermitiana. Cuando una función es hermitiana, su parte real es par y su parte imaginaria es impar:

$$\Re[X_k]=\Re[X_{-k}]$$
$$\Im[X_k]=-\Im[X_{-k}]$$

O dicho de otra manera, su espectro de amplitud es par y su espectro de fase es impar:

$$|X_k|=|X_{-k}|$$
$$\varphi_k=-\varphi_{-k}$$

9. ¿Como se define la energía de una secuencia?

Se define la energía de una secuencia x_n como la suma de sus amplitudes al cuadrado:

$$Energía\ de\ x_n=\sum_n |x_n|^2$$

10. ¿Qué dice el teorema de Parseval?

El teorema de Parseval dice que la energía de una secuencia x_n de longitud N en el dominio de la transformada discreta de Fourier, es N veces la energía de la secuencia en el dominio del tiempo:

$$N\sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2=\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$$

Es decir que la energía en un dominio es proporcional a la energía en el otro dominio, en general el factor de proporcionalidad depende de la forma en que se defina la transformada de Fourier. En nuestro caso el factor de proporcionalidad es N .

11. ¿Qué sucede con el espectro de amplitud y con el espectro de fase de una señal $x_n=(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1},)$ de longitud N cuando la conjugamos, la revertimos en tiempo y la adelantamos $N-1$ muestras $x_{-n}^*=(x_{N-1}^*, \ldots, x_2^*, x_1^*, \underline{x_0^*})$?

$$x_n \Leftrightarrow X_k=|X_k|e^{i\varphi_k}$$

$$x^*_{-n} \Leftrightarrow X^*_k = |X_k| e^{-i\varphi_k}$$

Es decir que revertir, conjugar y adelantar una secuencia x_n de longitud N en $N-1$ muestras, no modifica el espectro de amplitud, solo cambia el signo de su espectro de fase.

12. ¿Cómo definimos la operación de correlación cruzada $\phi_{ab}(\tau)$ entre dos señales a_n y b_n ? ¿A qué es igual el espectro de amplitud y el de fase de la correlación cruzada $\phi_{ab}(\tau)$?

Dada una secuencia a_n de longitud N y una secuencia b_n de longitud M , se define la correlación cruzada entre a_n y b_n a la secuencia de $\phi_{ab}(\tau)$ de longitud $N+M-1$ que surge del producto de convolución entre la secuencia a_n conjugada, revertida en tiempo y adelantada en $N-1$ muestras y la secuencia b_n :

$$\phi_{ab}(\tau) = a^*_{-n} * b_n = \sum_n a^*_n b_{n+\tau} \Leftrightarrow A^*_k \cdot B_k = |A_k| \cdot |B_k| e^{i(\varphi_B - \varphi_A)_k}$$

Observe que la correlación cruzada no es una operación conmutativa.
La transformada de Fourier de la autocorrelación de una secuencia es igual al espectro de amplitud al cuadrado, es decir que al autocorrelacionar una secuencia se pierde la información del espectro de fase:

$$\phi_{aa}(\tau) = a^*_{-n} * a_n = \sum_n a^*_n b_{n+\tau} \Leftrightarrow A^*_k \cdot A_k = |A_k| \cdot |A_k| e^{i(\varphi_A - \varphi_A)_k} = |A_k|^2$$

Se denomina espectro de potencia de una secuencia a su espectro de amplitud al cuadrado.