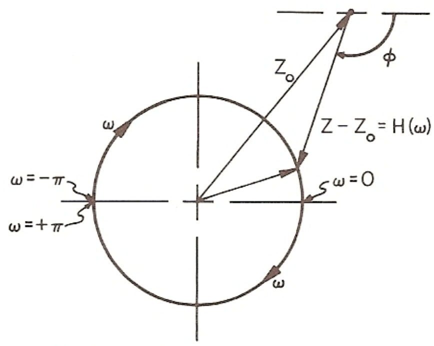
Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 4

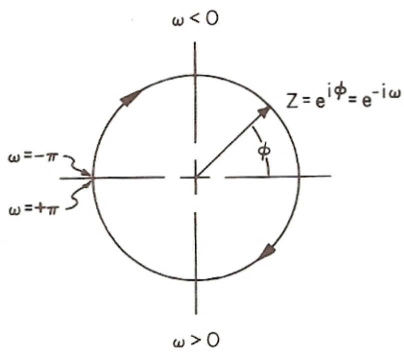
Cuplas y Filtros Elementales

1. Interprete gráficamente en el plano complejo la respuesta en frecuencia de una cupla o dipolo $H\left(Z=e^{-i\omega}\right)=Z-Z_0$ con un un cero $Z_0=\left|Z_0\right|e^{i\varphi_0}$ fuera del círculo unidad.

   El más simple de los filtros elementales es la cupla o dipolo cuya transformada Z se puede expresar como $H(Z)=Z-Z_0$, este dipolo tiene un cero en $Z=Z_0=\left|Z_0\right|e^{i\varphi_0}$.
   En la siguiente figura podemos observar su respuesta en frecuencia como un vector en el plano complejo $H\left(Z=e^{-i\omega}\right)=Z-Z_0=H(\omega)$. Vemos a la variable compleja $Z=e^{-i\omega}$ como un vector posición que apunta a un punto sobre el círculo unidad, y vemos al cero complejo $Z_0=\left|Z_0\right|e^{i\varphi_0}$ como un vector posición que apunta al cero del dipolo:



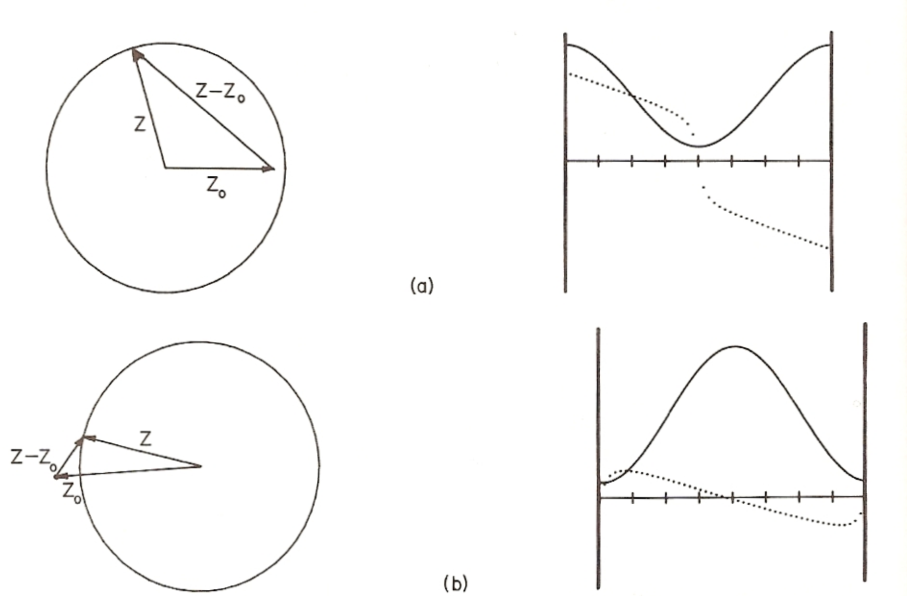
   Si realizamos mentalmente el ejercicio de mover el extremo del vector $Z=e^{-i\omega}=e^{i\varphi_Z}$ en sentido horario, alrededor del circulo unidad desde $\omega=-\pi$, pasando por $\omega=0$, hasta llegar a $\omega=+\pi$, arrastrando junto con él al extremo del vector $\left(Z-Z_0\right)$, podemos obtener gráficamente los valores del espectro de amplitud $\left|Z-Z_0\right|$ y del espectro de fase $\varphi_{(Z-Z_0)}$ que toma la respuesta en frecuencia $H(\omega)=e^{-i\omega}-\left|Z_0\right|e^{i\varphi_0}$ para los distintos valores de $\omega=-arg\left(Z=e^{-i\omega}\right)=-\varphi_Z$. El argumento de la variable Z es igual a la frecuencia cambiada de signo, por lo tanto la frecuencia crece en sentido horario, mientras que la fase o argumento de Z crece en sentido antihorario. Observe que el valor de ϕ indicado en la figura tomada del Karl, es la fase de $\left(Z-Z_0\right)$, y está indicada en sentido horario, por lo tanto debe tomar un valor negativo, ya que las fases se miden en sentido antihorario. La siguiente figura muestra la relación entre el argumento de Z y la frecuencia angular digital ω :



Observe que la fase del dipolo $\varphi_{(Z-Z_0)}$ va a tomar valores alrededor de $\varphi_0 \pm \pi$, es decir $\varphi_{(Z-Z_0)} = \varphi_0 \pm \pi + \Delta\varphi$, donde $\Delta\varphi$ es la variación del espectro de fase del dipolo a medida que nos movemos sobre el círculo unidad, en particular $\Delta\varphi = 0$ en $Z = |Z_0| e^{i\varphi_0}$, es decir para $\omega = -\varphi_0$. Observe además que la amplitud de la variación $\Delta\varphi$ del espectro de fase del dipolo será menor cuanto más lejos esté el cero $Z_0 = |Z_0| e^{i\varphi_0}$ del círculo unidad, es decir cuando $|Z_0| \gg 1$.

Si el cero de la transformada Z del dipolo se encuentra dentro del círculo unidad la fase del dipolo $\varphi_{(Z-Z_0)}$ se va a desplegar entre $-\pi$ y $+\pi$, y tendrá un salto de 2π en $\omega = -\varphi_0 \pm \pi$, por eso cuando el cero del dipolo está dentro del círculo unidad se dice que es de fase máxima.

En las siguientes figuras se puede observar la representación de la transformada Z del dipolo $H(Z = e^{-i\omega}) = Z - Z_0 = H(\omega)$ en el plano complejo, para el caso en que el cero se encuentra dentro (a) y fuera (b) del círculo unidad, junto con sus respectivos espectros de amplitud (linea continua) y de fase (linea punteada):



2. ¿Qué sucede con la fase de una secuencia de longitud $N=3$, de coeficientes reales, cuya transformada Z tiene un cero fuera del circulo unidad, en $Z_0 = |Z_0| e^{i\varphi_0}$ y otro cero en el conjugado del primero, es decir en $Z_0^* = |Z_0| e^{-i\varphi_0}$? ¿Explique por qué decimos que cuando una secuencia tiene los ceros de su transformada Z fuera del círculo unidad es de fase mínima?

La transformada Z de esta secuencia de longitud 3 con coeficientes reales se puede escribir de la siguiente manera:

$$H(Z) = (Z - Z_0)(Z - Z_0^*) = (e^{-i\omega} - |Z_0| e^{i\varphi_0})(e^{-i\omega} - |Z_0| e^{-i\varphi_0})$$

Es decir que el espectro de fase de esta secuencia de tres puntos se puede escribir del siguiente modo:

$$\varphi_{H(Z)} = \varphi_0 \mp \pi + \Delta\varphi_1 - \varphi_0 \mp \pi + \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_{H(Z)}$$

Donde $\Delta\varphi_1$ es la variación del espectro de fase del dipolo $(Z - Z_0)$ y $\Delta\varphi_2$ es la variación del espectro de fase del dipolo $(Z-Z_0^*)$ a medida que recorremos el círculo unidad. En particular para $\omega=0$ el espectro de fase será nulo $\Delta\varphi_{H(Z=1)}=0$ debido a la simetría de los ceros respecto del eje real, es decir que el espectro de fase variará en un entorno de cero: $\varphi_{H(Z)}=0+\Delta\varphi_{H(Z)}$. Es por esta razón que las secuencias reales cuyas transformadas Z tienen los ceros fuera del círculo unidad se dice que son de fase mínima.

3. ¿Qué sucede con el espectro de amplitud de una secuencia $\boldsymbol{x_n}$ de longitud N cuando su transformada Z tiene un cero sobre el círculo unidad en $Z_k=1e^{i\varphi_k}$?

   Ya vimos que la transformada Z de una secuencia $\boldsymbol{x_n}$ de longitud N se puede factorizar del siguiente modo:
   $$X(Z)=x_{N-1}(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)\cdots(Z-Z_k)\cdots(Z-Z_{N-1})$$
   Cuando $Z=\mathrm{e}^{-i\omega}=1e^{i\varphi_k}$ en $\omega=-\varphi_k$ entonces $(Z-Z_k)=0$ por lo tanto $|X(\omega=-\varphi_k)|=0$. Es decir el espectro de amplitud de $\boldsymbol{x_n}$ se anulará en $\omega=-\varphi_k$.

4. ¿Qué sucede con el espectro de amplitud de la inversa de una cupla o dipolo cuando su transformada Z tiene su polo en $Z_p=(1+\varepsilon)e^{i\varphi_p}$, con $\varepsilon\to 0^+$?

   Podemos escribir la transformada Z de la inversa de un dipolo como $H(Z)=1/(Z-Z_p)$ cuando evaluemos la respuesta en frecuencia en $Z=\mathrm{e}^{-i\omega}=e^{i\varphi_p}$ tendremos:
   $$H(Z=\mathrm{e}^{-i\omega}=e^{i\varphi_p})=1/(e^{i\varphi_p}-(1+\varepsilon)e^{i\varphi_p})=1/(\varepsilon e^{i(\varphi_p+\pi)})=\frac{1}{\varepsilon}e^{-i(\varphi_p+\pi)}$$
   $$|H(\omega=-\varphi_p)|=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}=\infty$$
   Es decir que cuando veamos un pico en el espectro de amplitud de un dipolo, o de cualquier secuencia de longitud arbitraria, es porque en esa frecuencia tenemos asociado un polo cercano al círculo unidad. El hecho de que el polo esté por fuera del círculo unidad implica que la inversa del dipolo será causal.

5. ¿Qué sucede con el espectro de amplitud y con el espectro de fase de un dipolo $\boldsymbol{h_{1n}}=(h_1,h_2)\Leftrightarrow H_1(Z)=h_1+h_2Z$, cuando intercambiamos y conjugamos sus coeficientes para obtener $\boldsymbol{h_{2n}}=(h_2^*,h_1^*)\Leftrightarrow H_2(Z)=h_2^*+h_1^*Z$?

   La transformada Z de $\boldsymbol{h_{1n}}$ tendrá una cero en $Z_0=-h_1/h_2$ mientras que la transformada Z de $\boldsymbol{h_{2n}}$ tendrá un cero en $1/Z_0^*=-h_2^*/h_1^*$. Es decir que si Z_0 está fuera del círculo unidad, el recíproco conjugado $1/Z_0^*$ estará dentro del círculo unidad. En consecuencia $\boldsymbol{h_{1n}}$ será de fase mínima y $\boldsymbol{h_{2n}}$ será de fase máxima. Es decir que al intercambiar y conjugar los coeficientes cambiará el espectro de fase, sin embargo se puede demostrar que el espectro de amplitud no se modifica.
   Cuando dos dipolos tienen igual espectro de amplitud pero diferente espectro de fase se dice que son dipolos equivalentes.

6. Generalice el concepto de fase mínima y de fase máxima para una secuencia de longitud arbitraria N ?

   La transformada Z de una secuencia de longitud N tendrá $N-1$ ceros, si todos sus ceros están fuera del círculo unidad, diremos que es una secuencia de fase mínima, si todos sus

ceros están dentro del círculo unidad, diremos que es de fase máxima, si algunos ceros están dentro y otros fuera, diremos que es de fase mixta.
Una secuencia de longitud N tiene 2^{N-1} secuencias equivalentes, es decir 2^{N-1} secuencias de igual longitud, con el mismo espectro de amplitud pero distinto espectro de fase, de las cuales sólo una será de fase mínima y sólo una será de fase máxima. Las restantes secuencias, tendrán algunos ceros fuera y otros dentro del círculo unidad, en ese caso diremos que son secuencias equivalentes de fase mixta.

7. Una señal $\boldsymbol{h_n}$ se puede retardar en tiempo en k muestras, convolucionándola con el operador impulso unitario retardado $\boldsymbol{\delta_{n-k}}$, es decir: $\boldsymbol{h_{n-k}}=\boldsymbol{h_n}*\boldsymbol{\delta_{n-k}}$. Calcule la respuesta en frecuencia de esta expresión y explique: ¿Por qué un retardo de una señal en tiempo es equivalente a un corrimiento lineal de la fase?

$$\boldsymbol{h_{n-k}}=\boldsymbol{h_n}*\boldsymbol{\delta_{n-k}}\Leftrightarrow H(Z)Z^k$$

Evaluando sobre el círculo unidad en $Z=\mathrm{e}^{-i\omega}$:

$$\boldsymbol{h_{n-k}}=\boldsymbol{h_n}*\boldsymbol{\delta_{n-k}}\Leftrightarrow H(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega k}=|H(\omega)|\,e^{i\varphi(\omega)}e^{-i\omega k}=|H(\omega)|\,e^{i(\varphi(\omega)-\omega k)}$$

Es decir que un retardo en tiempo de k muestras, producirá un corrimiento lineal de la fase en función de la frecuencia de $\Delta\varphi_{(\omega)}=-\omega k$.

8. ¿Qué es el retardo de fase?

Vimos que una señal $\boldsymbol{x_n}$ se puede expresar como una suma escalada de exponenciales complejas de la siguiente manera:

$$x_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega n}d\omega$$

Consideremos un sistema lineal e invariante de respuesta impulsiva $\boldsymbol{h_n}$, con un espectro de fase $\varphi_H(\omega)$:

$$\boldsymbol{h_n}\Leftrightarrow H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{i\varphi_H(\omega)}$$

Si excitamos este SLI con una señal $\boldsymbol{x_n}$, cada una de las componentes en frecuencia de la señal de entrada $\frac{1}{2\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega n}$, sufrirá un retardo en tiempo, denominado retardo de fase τ_{ph} , que expresado en número de muestras, está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau_{ph}=-\frac{\varphi_H(\omega)}{\omega}$$

Si en vez de frecuencia angular digital ω utilizamos frecuencia angular Ω , entonces el retardo de fase quedará expresado en segundos:

$$\tau_{ph}=-\frac{\varphi_H(\Omega)}{\Omega}$$

9. ¿Qué es el retardo de grupo?

Consideremos la misma señal $\boldsymbol{x_n}$ y el mismo sistema lineal e invariante $\boldsymbol{h_n}$ de la pregunta anterior. Se define el retardo de grupo τ_g como el retardo que sufre la energía o la envolvente de la señal de entrada al pasar por el sistema, este retardo está dado en número de muestras por la expresión:

$$\tau_g = -\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega}$$

Si en vez de frecuencia angular digital ω utilizamos frecuencia angular Ω , entonces el retardo de grupo quedará expresado en segundos:

$$\tau_g = -\frac{d\varphi_H(\Omega)}{d\Omega}$$

Cuando el retardo de grupo $\tau_g = f_{(\omega)}$ es función de la frecuencia ω , la energía de algunas frecuencias se retardará más que la energía contenida en otras frecuencias y diremos que el sistema es dispersivo, en estos casos la forma de la señal de salida será distinta a la forma de la señal de entrada aun cuando el espectro de amplitud no cambie.

10. ¿Qué es un filtro pasa-todo?

Diremos que un filtro $\boldsymbol{h_n^{PT}}$ es un filtro pasa todo (cualquiera sea su espectro de fase) si su espectro de amplitud es constante e igual a 1. Por lo tanto, si convolucionamos una señal $\boldsymbol{x_n}$ con un filtro pasa todo no modificaremos su espectro de amplitud sólo modificaremos su espectro de fase.

$$\boldsymbol{h_n^{PT}} \Leftrightarrow H^{PT}(\omega) = |H^{PT}(\omega)| e^{i\varphi_{H^{PT}}(\omega)} = 1\, e^{i\varphi_{H^{PT}}(\omega)}$$

$$\boldsymbol{x_n} * \boldsymbol{h_n^{PT}} \Leftrightarrow X(\omega) H^{PT}(\omega) = |X(\omega)| e^{i\varphi_X(\omega)} |H^{PT}(\omega)| e^{i\varphi_{H^{PT}}(\omega)} = |X(\omega)| e^{i(\varphi_X(\omega) + \varphi_{H^{PT}}(\omega))}$$

11. ¿De qué manera sencilla es posible construir un filtro pasa-todo, con un único cero y un único polo, de manera tal que sea causal y estable?

Si tomamos un dipolo $\boldsymbol{h_n} = (h_1, h_2)$ e intercambiamos y conjugamos sus coeficientes, no modificaremos su espectro de amplitud, sólo modificaremos su espectro de fase al cambiar su cero por el recíproco conjugado. Por lo tanto la siguiente transformada Z corresponderá a un filtro pasa-todo con un único cero y un único polo:

$$H(Z) = \frac{1 - Z Z_p^*}{Z - Z_p}$$

Como el espectro de amplitud del numerador será igual al espectro de amplitud del denominador, entonces el espectro de amplitud del cociente será constante e igual a 1. Para que el filtro pasa-todo sea causal y estable el polo Z_p debe estar fuera del círculo unidad, es decir $|Z_p| > 1$.

<u>Observación:</u>
Las siguientes transformadas Z no corresponden a filtros pasa-todo:

$$H(Z) = \frac{Z - \frac{1}{Z_p^*}}{Z - Z_p} \quad \text{o} \quad H(Z) = \frac{Z - Z_0}{Z - \frac{1}{Z_0^*}}$$

Estos filtros tienen espectro de amplitud constante pero distinto de 1 por lo tanto no son filtros pasa-todo, ya que modificarán el espectro de amplitud de la entrada en un factor constante.

12. ¿Por qué decimos que una secuencia de fase mínima es también de mínimo retardo?

Es posible demostrar que el retardo de grupo τ_g introducido por un filtro pasa-todo con un único polo y un único cero, causal y estable, es siempre mayor que cero:

Si $H(Z)=\frac{1-Z Z_p^*}{Z-Z_p}$ con $|Z_p|>1 \quad \Rightarrow \quad \tau_g=-\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega}>0$

Dada una secuencia de fase mínima x_n de longitud N con un cero en Z_p , podemos factorizar su transformada Z del siguiente modo:

$$X(Z)=x_{N-1}(Z-Z_2)(Z-Z_3)\cdots(Z-Z_p)\cdots(Z-Z_{N-1})$$

Si multiplicamos $X(Z)$ por la transformada Z del filtro pasa todo $H(Z)=\frac{1-Z Z_p^*}{Z-Z_p}$ estaremos reemplazando el cero $|Z_p|>1$ por su recíproco conjugado $|1/Z_p^*|<1$ sin modificar su espectro de amplitud, y estaremos introduciendo un retardo positivo de su energía o de su envolvente. Al intercambiar el cero la secuencia de fase mínima pasará a ser una secuencia de fase mixta.

Si aplicamos sucesivos filtros pasa-todo que cambien los ceros que se encuentran fuera del círculo unidad por sus recíprocos conjugados que se encuentran dentro del círculo unidad, sin modificar su espectro de amplitud, iremos obteniendo diferentes secuencias equivalentes e iremos retrasando más y más la energía de la secuencia. Cuando reemplacemos todos los ceros que se encuentran fuera del círculo unidad por sus recíprocos conjugados que se encuentran dentro del círculo unidad, obtendremos la secuencia de fase máxima equivalente, que de todas las secuencias equivalentes es la que tiene la energía más retardada. En realidad la secuencia de fase máxima será igual a la secuencia de fase mínima revertida.

Es decir que de las 2^{N-1} secuencias equivalentes, la de fase mínima es la que tiene más energía al comienzo de la secuencia, mientras que la de fase máxima es la que tiene más energía al final de la señal. Es por eso que hablar de fase mínima es equivalente a hablar de mínimo retardo y hablar de fase máxima es equivalente a hablar de máximo retardo.