Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 3

Respuesta en Frecuencia de los SLI

1. ¿Porqué decimos que la función exponencial compleja $x_n = \exp(i\omega n)$ es una función propia de los SLI (Sistemas Lineales e Invariantes)?
   ¿Cuál es el valor propio asociado a la función exponencial compleja para un SLI de respuesta impulsiva h_n ? ¿Qué nombre se le da a este valor propio?

   Dado un sistema lineal e invariante de respuesta impulsiva h_n de longitud N , la respuesta del sistema al excitarlo con una exponencial compleja $x_n = \exp(i\omega n)$ estará dada por:

   $$y_n = x_n * h_n$$
   $$y_n = \sum_k x_k h_{n-k} = \sum_k h_k x_{n-k} = \sum_k h_k e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_k h_k e^{-i\omega k}$$

   Diremos que $\exp(i\omega n)$ es una función propia del SLI porque al excitarlo con esta exponencial compleja, el sistema responderá con la misma función propia escalada por su valor propio asociado $\sum_k h_k e^{-i\omega k}$.

   Definimos a la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema lineal e invariante como el valor propio asociado a la función propia exponencial compleja $\exp(i\omega n)$:

   $$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i\omega k}$$

   La respuesta del sistema a la exponencial compleja $x_n = \exp(i\omega n)$, será igual a la misma exponencial compleja escalada por su respuesta en frecuencia $H(\omega)$, es decir:

   $$y_n = H(\omega) . x_n = H(\omega) . e^{i\omega n}$$

   La respuesta en frecuencia $H(\omega) = |H(\omega)| . e^{i\varphi(\omega)}$ es una función definida de valores reales a valores complejos $H(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, por lo tanto no solo introducirá un factor de escala $|H(\omega)|$ en la salida sino también un cambio de fase $\varphi(\omega)$:

   $$y_n = H(\omega) . e^{i\omega n} = |H(\omega)| . e^{i(\omega n + \varphi(\omega))}$$

2. ¿Cuáles son las propiedades de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de un SLI?

   La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es una función definida en el dominio continuo de las frecuencias angulares digitales $\omega \in \mathbb{R}$. Las exponenciales complejas son funciones periódicas de período 2π , por lo tanto, como la respuesta en frecuencia es una suma escalada de exponenciales complejas, también será una función periódica de período 2π . La respuesta en frecuencia del sistema puede ser invertida para obtener a partir de ella la respuesta impulsiva del sistema. Es decir que un sistema lineal e invariante queda perfectamente definido dando su respuesta impulsiva o bien dando su respuesta en frecuencia. Intercambiando los roles de tiempo y frecuencia, como $H(\omega)$ es una función periódica, podemos desarrollarla en series de Fourier, pero si observamos su expresión: $H(\omega)=\sum_n h_n e^{-i\omega n}$, vemos que ya tiene la forma de un desarrollo en series de Fourier, donde los h_n están cumpliendo el papel de los coeficientes de Fourier, en consecuencia podremos obtener los h_n a partir de la expresión que nos permite calcular los coeficientes de Fourier:

$$h_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

3. ¿Qué relación existe entre la respuesta en frecuencia de un SLI y la transformada Z de su respuesta impulsiva h_n ?

La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante no es más que su transformada Z evaluada sobre el círculo unidad, en $Z=e^{-i\omega}$:

$$H\left(Z=e^{-i\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1} h_n Z^n=\sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\omega n}=H(\omega)$$

4. ¿Cómo definimos la respuesta en frecuencia de una señal x_n ?

Análogamente, la respuesta en frecuencia de una señal x_n de longitud N se define como:

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega n}$$

Diremos que la respuesta en frecuencia $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal discreta x_n . Y su transformada inversa estará dada por la expresión:

$$x_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

5. ¿Qué relación existe entre la respuesta en frecuencia $X(\omega)$ de una señal x_n y su transformada Z $X(Z)$?

La respuesta en frecuencia de una señal x_n de longitud N no es más que su transformada Z evaluada sobre el círculo unidad, en $Z=e^{-i\omega}$:

$$X\left(Z=e^{-i\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1} x_n Z^n=\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega n}=X(\omega)$$

6. ¿Cómo se expresa el teorema de convolución en el dominio de la respuesta en frecuencia o simplemente dominio de las frecuencias?

El teorema de convolución nos dice que convolucionar en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar en el dominio de la transformada Z:

$$a_n * b_n \Leftrightarrow A(Z).B(Z)$$

El dominio de las frecuencias $Z=e^{-i\omega}$, no es más que el círculo unidad en el plano complejo (dominio de la transformada Z) , es decir:

$$a_n * b_n \Leftrightarrow A(Z=e^{-i\omega}).B(Z=e^{-i\omega})$$
$$a_n * b_n \Leftrightarrow A(\omega).B(\omega)$$

El teorema de convolución en el dominio de las frecuencias, nos dice que convolucionar en el dominio del tiempo, es equivalente a multiplicar en el dominio de las frecuencias.

7. Calcule las respuestas en frecuencia de los siguientes filtros de tres puntos:

$$h_n=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\underline{3}},\frac{1}{3}\right)$$
$$h_n=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\underline{2}},\frac{1}{4}\right)$$

¿Qué sucederá si excitamos a estos SLI con una señal x_n que tenga un amplio contenido en frecuencias $X(\omega)\neq 0$ para $-\pi<\omega<\pi$?

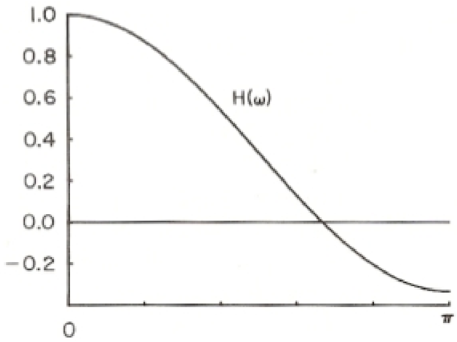
Analicemos el primer filtro:

$$h_n=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\underline{3}},\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow H(Z)=\frac{1}{3}(Z^{-1}+1+Z)$$

$$h_n=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\underline{3}},\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow H(\omega)=\frac{1}{3}(e^{i\omega}+1+e^{-i\omega})$$

$$H(\omega)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{(e^{i\omega}+e^{-i\omega})}{2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\omega)$$



Lo primero que podemos observar es que $H(\omega)$ es real, lo que significa que la salida estará en fase con la entrada. La simetría de la respuesta impulsiva h_n es lo que determina que $H(\omega)$ sea real. Lo segundo que podemos ver es que las bajas frecuencias de x_n , próximas a cero, pasarán sin ser modificadas por el filtro. Si asociamos las variaciones rápidas de la señal de entrada con las altas frecuencias vemos que estas serán atenuadas paulatinamente a medida que la frecuencia ω aumenta desde 0 hasta $2\pi/3$. Es decir la señal de salida será una versión suavizada de la señal de entrada. La frecuencia $2\pi/3$ será anulada completamente, es decir, no estará presente en la salida. Sin embargo a partir de la frecuencia $2\pi/3$ sucede algo no deseable, si bien para estas frecuencias la amplitud de la salida es menor que la amplitud de la entrada en valor absoluto, vemos que se produce un cambio de polaridad o de signo y la atenuación es menor que la atenuación sufrida por frecuencias inmediatas anteriores.

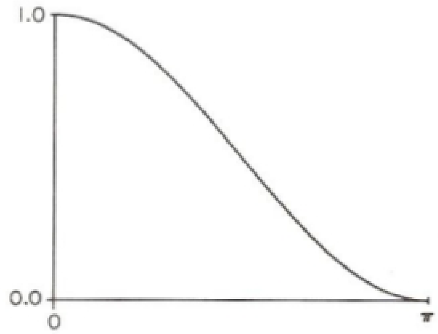
Analicemos el segundo filtro:

$$h_n=\left(\frac{1}{4},\underline{\frac{1}{2}},\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow H(Z)=\frac{1}{4}\left(Z^{-1}+2+Z\right)$$

$$h_n=\left(\frac{1}{4},\underline{\frac{1}{2}},\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow H(\omega)=\frac{1}{4}\left(e^{i\omega}+2+e^{-i\omega}\right)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\omega)$$



Este segundo filtro también tiene una respuesta en frecuencia real, por lo que la salida estará en fase con la entrada. Las bajas frecuencias ω próximas a cero de la señal de entrada x_n pasarán sin ser modificadas. A medida que el valor de las frecuencias de la entrada aumente, también ira aumentando la atenuación de las mismas desde la frecuencia $\omega=0$ hasta la frecuencia $\omega_N=\pi$. Impidiendo completamente el paso de la frecuencia de Nyquist, que como veremos más adelante es la frecuencia máxima que puede contener la señal de entrada sin que se produzca aliasing. La calidad de este filtro, como filtro suavizador de la señal de entrada, es superior a la del primer filtro.

8. En general las respuestas en frecuencias, ya sean de señales o de respuestas impulsivas, tomarán valores complejos. En la jerga de análisis de señales ¿Cómo le llamaremos al módulo y al argumento de las respuestas en frecuencia?

La respuesta en frecuencia de una señal o de una respuesta impulsiva, es una función definida de valores reales a valores complejos $H(\omega):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$, como todo complejo tendrá un módulo y un argumento $H(\omega)=|H(\omega)|.e^{i\varphi(\omega)}$. En la jerga de análisis de señales al módulo de la respuesta en frecuencia $|H(\omega)|$ lo llamaremos espectro de amplitud, y al argumento $\varphi(\omega)$ lo llamaremos espectro de fase. Es decir que multiplicar respuestas en frecuencia será equivalente a multiplicar espectros de amplitud y sumar espectros de fase.

9. ¿Cuál es la respuesta en frecuencia del operador exacto de derivación? ¿Qué modificación introduce en el espectro de amplitud y en el espectro de fase de una señal este operador exacto de derivación?

   La respuesta en frecuencia del operador exacto de derivación es igual a $i\omega$, es decir que al derivar una función estamos escalando su espectro de amplitud por ω y estamos adelantando su espectro de fase en $\pi/2$ radianes.

10. ¿Es posible aplicar el operador exacto de derivación en el dominio de los tiempos discretos?

    La derivación es una operación que solo está definida para una función continua definida en un dominio continuo. La interpretamos como la pendiente de la recta tangente en un punto. En un dominio discreto no es posible definir la derivada, solo podemos aproximarla como la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos consecutivos en los cuales disponemos de valores observados.

11. Un método para obtener una solución aproximada de la derivación en el dominio de los tiempos discretos es mediante las diferencias de primer orden. Las diferencias de primer orden pueden ser: centradas, hacia adelante o hacia atrás. Calcule la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante. Compare la respuesta en frecuencia del operador exacto de derivación con la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante. ¿Para que valores de frecuencias la diferencia de primer orden me dará una solución aproximada aceptable del valor exacto de derivación? ¿Qué sucederá con el espectro de fase de esta solución aproximada?

    La diferencia de primer orden hacia adelante se define como:

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

    Calculemos la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante:

$$Y(Z) = Z^{-1} X(Z) - X(Z) = X(Z)(Z^{-1} - 1)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)(e^{i\omega} - 1)$$

$$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega) = (e^{i\omega} - 1) = i\omega - \omega^2/2 - i\omega^3/6 + \omega^4/24 + \cdot + (i\omega)^n/n! + \cdot\cdot$$

    Para frecuencias muy bajas $\omega \ll \omega_N$ próximas a cero $H(\omega) \approx i\omega$, para estas bajas frecuencias la diferencia de primer orden es una buena aproximación del operador exacto de derivación. Pero el problema mayor es que este valor aproximado será asignado al punto y_n cuando en realidad debería ser asignado al punto $y_{n+1/2}$ este corrimiento en tiempo de medio intervalo de muestreo, introducirá un corrimiento lineal de la fase que vale $\varphi = 0$ para $\omega = 0$ y vale $\varphi = \pi/2$ para $\omega_N = \pi$ (ya veremos en detalle por qué sucede este corrimiento lineal de la fase). Una alternativa para evitar este corrimiento de la fase es utilizar diferencias de primer orden centradas $y_n = \Delta x_n = (x_{n+1} - x_{n-1})/2$ si bien esta aproximación no introduce error en el punto de asignación, y por lo tanto no produce un corrimiento lineal de la fase, introduce un mayor error en el valor estimado de la derivada.

12. ¿Cuál es la respuesta en frecuencia del operador exacto de integración? ¿Qué modificación introduce en el espectro de amplitud y en el espectro de fase de una señal este operador

exacto de integración?

La respuesta en frecuencia del operador exacto de integración es igual $1/i\omega$, es decir que al integrar una función estamos escalando su espectro de amplitud por $1/\omega$ y estamos atrasando su espectro de fase en $\pi/2$ radianes.

13. ¿Es posible aplicar el operador exacto de derivación en el dominio de las frecuencias?

Como ya mencionamos, no es posible aplicar el operador exacto de derivación en el dominio de los tiempos discretos, sin embargo, sí es posible hacerlo en el dominio de las frecuencias.
Dada una señal discretizada es posible obtener su derivada exacta yendo al dominio de las frecuencias (también llamado dominio de Fourier):

$$x_n \Leftrightarrow X(\omega)$$

Una vez en el dominio de las frecuencias multiplicamos por $i\omega$ y luego antitransformamos y volvemos al dominio de los tiempos discretos para así obtener la versión discreta de la derivada:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_n \Leftrightarrow i\omega X(\omega)$$

14. Un método para obtener una solución aproximada de la integración en el dominio de los tiempos discretos está definido por la regla del trapezoide. Calcule la respuesta en frecuencia de la regla del trapezoide. Compare la respuesta en frecuencia del operador exacto de integración con la respuesta en frecuencia de la regla del trapezoide. ¿Para que intervalos de frecuencias la regla del trapezoide me dará una solución aproximada aceptable del valor exacto de la integración?

Una forma de aproximar la integración en un dominio discreto es aplicando la regla del trapezoide:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left[x_n + x_{n-1}\right]$$

Calculamos la respuesta en frecuencia de la regla del trapezoide:

$$Y(Z) = ZY(Z) + \frac{1}{2}\left[X(Z) + ZX(Z)\right]$$

$$Y(Z) - ZY(Z) = Y(Z)(1-Z) = \frac{X(Z)}{2}(1+Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{2}\frac{1+Z}{1-Z}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-i\omega}}{1-e^{-i\omega}} = \frac{1}{2}\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}+e^{-i\frac{\omega}{2}}}{e^{i\frac{\omega}{2}}-e^{-i\frac{\omega}{2}}} = \frac{1}{2i}\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{2i}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Si ω es pequeño entonces podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{1}{2i}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \approx \frac{1}{i\omega}$$

Para frecuencias muy bajas $\omega \ll \omega_N$ próximas a cero $H(\omega) \approx \frac{1}{i\omega}$, para estas frecuencias bajas, la regla del trapezoide es una buena aproximación del operador exacto de integración.

15. Un método para aproximar las operaciones de derivación e integración en el dominio discreto de los tiempos es conocido como transformación bilineal. En el caso de la integración la transformación bilineal no es más que la regla del trapezoide. ¿Podría dar una explicación sencilla de lo que hace la transformación bilineal en el caso de la derivación? No se pierda en los detalles matemáticos, vaya directamente a la expresión:

$$y_{n-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

Compare la transformadas Z de las transformaciones bilineales directa e inversa. ¿Qué relación existe entre ellas?

Calculemos la transformada Z de la expresión dada:

$$\frac{1}{2}(Y(Z)+ZY(Z)) = X(X) - ZX(Z)$$

$$\frac{1}{2}Y(Z)(1+Z) = X(X)(1-Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = 2\frac{1-Z}{1+Z}$$

Observe que esta transformada Z es la inversa de la transformada Z correspondiente a la regla del trapezoide deducida en la pregunta 14. Esta transformada Z y la de la regla del trapezoide forman la transformación bilineal directa e inversa.

16. ¿Cuales son las propiedades de la transformación bilineal que la hacen tan conveniente a la hora de aproximar una ecuación diferencial como una ecuación de diferencias utilizando esta aproximación?

La transformación bilineal tiene una respuesta en amplitud muy superior a la de las diferencias de primer orden para frecuencias extremadamente bajas, y tiene respuestas en fase exacta para todas las frecuencias a expensas de una paupérrima respuesta en amplitud para las frecuencias mas altas.

Toda ecuación diferencial, cualquiera sea el orden de sus derivadas, siempre y cuando sea de primer grado (es decir, las derivadas no están elevadas a ninguna potencia ni están multiplicadas entre si), caracterizará a un sistema lineal. Si además es de coeficientes constantes, entonces caracterizará a un sistema lineal e invariante.

Si la ecuación diferencial caracteriza a un sistema lineal, causal, estable y de fase mínima, al convertirla en una ecuación de diferencias utilizando la transformación bilineal conservará todas estas propiedades, y tendrá una solución discreta, causal, estable y de fase mínima. Esto no siempre sucede cuando se convierte una ecuación diferencial en una ecuación de diferencias utilizando diferencias hacia atrás o hacia adelante.

Recuerde que cualquiera sea la frecuencia angular máxima Ω_{max} que contiene una señal, siempre podemos hacer que la frecuencia angular digital $\omega = \Omega \Delta t$ sea tan pequeña como queramos utilizando un intervalo de muestreo Δt lo suficientemente pequeño.