Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 2

Transformada Z

1. Dada una señal $\boldsymbol{x_n}=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{N-1})$ de longitud N.
   ¿Cómo define su transformada Z, $TZ\{x_n\}=X(Z)$?

   Dada una señal $\boldsymbol{x_n}=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{N-1})$ de longitud N, definiremos su transformada Z como el polinomio $X(Z), Z\in\mathbb{C}$ de grado $N-1$, dado por:

   $$X(Z)=x_0+X_1Z+x_2Z^2+x_3Z^3+\ldots+x_{N-1}Z^{N-1}$$

   Observe que la transformada Z será un polinomio únicamente cuando las señales son causales, ya que si la señal toma valores para tiempos negativos aparecerán potencias negativas de Z y en ese caso X(Z) ya no es un polinomio.
   Indicaremos que X(Z) es la transformada Z de la señal $\boldsymbol{x_n}$ del siguiente modo:

   $$\boldsymbol{x_n}\Leftrightarrow X(Z)=TZ\{x_n\}$$

   En general supondremos que el primer elemento de la secuencia de números entre paréntesis que definen a la señal, es el que corresponde al instante inicial $t=0$. De no ser así, indicaremos con una flecha o con un guión bajo, cual es el elemento de la secuencia que corresponde al instante cero. Por ejemplo:

   $$(x_0,\underline{x_1},x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{N-1})\Leftrightarrow x_0Z^{-1}+x_1Z^0+x_2Z^1+x_3Z^2+\ldots+x_{N-1}Z^{N-2}$$

   $$\left(x_0,\underset{\uparrow}{x_1},x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{N-1}\right)\Leftrightarrow x_0Z^{-1}+x_1Z^0+x_2Z^1+x_3Z^2+\ldots+x_{N-1}Z^{N-2}$$

2. Si retrasamos una señal x_n en k muestras en el dominio del tiempo.
   ¿Cómo se manifiesta este retardo en tiempo en el dominio de la transformada Z?

   Dada una señal $\boldsymbol{x_n}=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{N-1})$ de longitud N al retrasarla, por ejemplo en 3 muestras en el dominio del tiempo, obtendremos $\boldsymbol{x_{n-3}}=(0,0,0,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{N-1})$ y su transformada Z nos quedará:

   $$\boldsymbol{x_{n-3}}\Leftrightarrow 0Z^0+0Z^1+0Z^2+x_0Z^3+x_1Z^4+x_2Z^5+\ldots.+x_{N-1}Z^{N+2}=Z^3X(Z)$$

   En general al retrasar una señal $\boldsymbol{x_n}$ en k muestras en tiempo, obtendremos:

   $$\boldsymbol{x_{n-k}}\Leftrightarrow x_0Z^k+x_1Z^{k+1}+x_2Z^{k+2}+\ldots.+x_{N-1}Z^{N-1+k}$$

   $$\boldsymbol{x_{n-k}}\Leftrightarrow Z^kX(Z)$$

   Es decir que retrasar la señal en k muestras en el dominio del tiempo, es equivalente a multiplicarla por Z^k en el dominio de la transformada Z.
   Por este motivo suele decirse que Z puede ser interpretada de dos maneras: como una

variable definida en un dominio complejo, o simplemente como un operador de retardo unitario. Por lo general, no evaluaremos Z en el plano complejo, por lo que la interpretación como un operador de retardo unitario suele resultar más adecuada.
Análogamente, si adelantamos la señal en vez de atrasarla, tendremos:

$$x_{n+k} \Leftrightarrow Z^{-k} X(Z)$$

3. Si convolucionamos dos señales a_n y b_n , de longitud N y M respectivamente, en el dominio del tiempo. ¿Cómo se expresa esta operación en el dominio de la transforma Z? Explique brevemente porqué.

   Sean $\boldsymbol{a_n}$ y $\boldsymbol{b_n}$ de longitud N y M respectivamente. Sus transformadas Z estarán dadas por los polinomios:
   $X(Z)=x_0+X_1 Z+x_2 Z^2+x_3 Z^3+...+x_{N-1} Z^{N-1}$
   $B(Z)=b_0+b_1 Z+b_2 Z^2+b_3 Z^3+...+b_{M-1} Z^{M-1}$
   El producto de $A(Z)$ por $B(Z)$ será un polinomio $C(Z)$ de grado $N+M-2$:
   $C(Z)=c_0+c_1 Z+c_2 Z^2+c_3 Z^3+...+c_{N+M-2} Z^{N+M-2}$
   El término genérico $c_n Z^n$ del polinomio $C(Z)$ se obtendrá haciendo todos los productos posibles entre términos del polinomio $A(Z)$ con términos del polinomio $B(Z)$ y luego sumando todos aquellos productos en los que Z quedó elevada al mismo exponente n :

$$c_n Z^n=\sum_k a_k b_{n-k} Z^n$$

   Es decir $c_n=\sum_k a_k b_{n-k}=\sum_k a_{n-k} b_k$. Esto no es más que la definición de producto de convolución $c_n=a_n * b_n=\sum_k a_k b_{n-k}$. Donde $\boldsymbol{c_n}$ es una señal de longitud $N+M-1$.
   Por lo tanto el producto de convolución de dos señales en el dominio del tiempo, es equivalente al producto de sus transformadas Z en el dominio de la transformada Z.

4. ¿Qué dice el teorema de convolución?

   El teorema de convolución nos dice que: el producto de convolución de dos señales en el dominio del tiempo, es equivalente al producto de sus transformadas Z en el dominio de la transformada Z.

5. Si factorizo un polinomio $C(Z)$ de grado $N+M-2$ en el dominio de la transformada Z, como el producto de dos polinomios $A(Z)$ y $B(Z)$, de grado $N-1$ y $M-1$ respectivamente. ¿Cómo se expresa esta operación en el dominio del tiempo.

   Si factorizo $C(Z)$ como $C(Z)=A(Z)B(Z)$, esta factorización en el dominio de la transformada Z, se expresa en el dominio del tiempo como un producto de convolución:

$$c_n=a_n * b_n$$

   Por lo tanto podemos escribir:

$$a_n \Leftrightarrow C(Z)/B(Z)$$
$$b_n \Leftrightarrow C(Z)/A(Z)$$

6. ¿Qué dice el teorema fundamental del álgebra?

   El teorema fundamental del álgebra nos dice que todo polinomio de grado N tendrá N raíces.

7. ¿Qué relación deben cumplir las raíces de un polinomio de coeficientes reales?

   En un polinomio de coeficientes reales sus raíces deben ser reales o bien presentarse de a pares complejos conjugados.

8. ¿Qué sucede con las raíces de un polinomio de coeficientes reales si revierto el orden de sus coeficientes?

   Al revertir el orden de los coeficientes reales de un polinomio, sus raíces cambian por sus reciprocas conjugadas (Z_0 cambiará por $1/Z_0^*$). Si los coeficientes no son reales, para que sus raíces cambien por sus reciprocas conjugadas, además de revertir los coeficientes debemos conjugarlos.

9. ¿Qué es una cupla o dipolo?

   Llamaremos cupla o dipolo a toda secuencia de longitud 2. En consecuencia la transformada Z de una cupla o dipolo tendrá un único cero o raíz.

   En general cuando hablamos de secuencia nos referimos indistintamente a una señal o a una respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante.

10. Dada la transformada Z de una señal de longitud N . La factorizo como el producto de $N-1$ polinomios de grado 1, más un factor de escala.
    ¿Qué debería obtener del polinomio para poder hacer esta factorización?
    ¿Cómo se expresa esta operación en el dominio del tiempo?

    Para poder factorizar un polinomio de grado $N-1$ como el producto de $N-1$ polinomios de primer grado más un factor de escala, primero debo encontrar sus $N-1$ ceros o raíces Z_k , $k=1,N-1$, una vez halladas las raíces puedo factorizarlo de cualquiera de las siguientes maneras:

$$X(Z)=x_0+x_1Z+x_2Z^2+\ldots+x_{N-1}Z^{N-1}=x_{N-1}(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)\ldots(Z-Z_{N-1})$$

$$X(Z)=x_0+x_1Z+x_2Z^2+\ldots+x_{N-1}Z^{N-1}=x_0(1-Z/Z_1)(1-Z/Z_2)(1-Z/Z_3)\ldots(1-Z/Z_{N-1})$$

    Esto en el dominio del tiempo será respectivamente equivalente a:

$$x_{N-1}.(-Z_1,1)*(-Z_2,1)*(-Z_3,1)*\ldots*(-Z_{N-1},1)\Leftrightarrow x_{N-1}(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)\ldots(Z-Z_{N-1})$$

$$x_0.(1,-1/Z_1)*(1,-1/Z_2)*\ldots*(1,-1/Z_{N-1})\Leftrightarrow x_0(1-Z/Z_1)(1-Z/Z_2)\ldots(1-Z/Z_{N-1})$$

11. Dada la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante $\boldsymbol{h_n}$, y la respuesta impulsiva de su sistema inverso $\boldsymbol{h_n^{-1}}$. ¿Cuál sería la transformada Z de la siguiente operación?

$$\boldsymbol{h_n * h_n^{-1} = \delta_n}$$

¿Qué relación existe entre las transformadas Z de $\boldsymbol{h_n}$ y $\boldsymbol{h_n^{-1}}$?

$$TZ\{h_n * h_n^{-1} = \delta_n\} \quad \Rightarrow \quad TZ\{h_n\}.TZ\{h_n^{-1}\} = TZ\{\delta_n\}$$

$$TZ\{\delta_n\} = TZ(1,0,0,0,0,0,0,\ldots) = 1$$

$$H(Z)H(Z)^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad H(Z)^{-1} = 1/H(Z)$$

12. Haciendo uso de la transformada Z inversa, exprese el operador inverso de una cupla o dipolo como un filtro AR de orden 1.

Sea $\boldsymbol{h_n} = (1, -k)$ una cupla con un cero en $z_0 = 1/k$.
Su transformada Z será: $H(Z) = 1 - kZ$.
La transformada Z de su operador inverso $\boldsymbol{h_n^{-1}}$ será $H(Z)^{-1} = \dfrac{1}{1-kZ}$.
Excitemos el sistema inverso con una señal $\boldsymbol{x_n}$ para obtener en su salida $\boldsymbol{y_n = x_n * h_n^{-1}}$.
Tomemos la transformada Z de esta última expresión:

$$TZ\{y_n = x_n * h_n^{-1}\}$$
$$Y(Z) = \frac{X(Z)}{1-kz}$$
$$Y(Z).(1-kZ) = X(Z)$$
$$Y(Z) - kZY(Z) = X(Z)$$

Ahora tomemos la transformada Z inversa de esta última expresión:

$$TZ^{-1}\{Y(Z) - kZY(Z) = X(Z)\}$$
$$TZ^{-1}\{Y(Z)\} - k\,TZ^{-1}\{ZY(Z)\} = TZ^{-1}\{X(Z)\}$$
$$y_n - k\,y_{n-1} = x_n$$

$$y_n = x_n + k\,y_{n-1}$$

Es decir que el operador inverso $\boldsymbol{h_n^{-1}}$ se puede expresar como un sistema autoregresivo de primer orden, donde la salida actual es igual a la entrada actual más la salida anterior escalada por k .

13. ¿Cuándo diremos que una cupla o dipolo es de fase mínima y cuando diremos que es de fase máxima?

Diremos que una cupla o dipolo con un cero en Z_0 es de fase mínima cuando su cero está fuera del círculo unidad, es decir $|Z_0| > 1$.
Diremos que una cupla o dipolo con un cero en Z_0 es de fase máxima cuando su cero está dentro del círculo unidad, es decir $|Z_0| < 1$.

14. Utilice la serie geométrica para expresar la transformada Z de la inversa de una cupla o dipolo como un desarrollo en serie de potencias positivas de Z. Repita el desarrollo en serie pero ahora en serie de potencias negativas de Z. ¿En qué caso la inversa de un dipolo será

causal y estable? ¿En qué caso la inversa del dipolo será anticausal y estable?

Sea $\boldsymbol{h_n}=(1,-k)$ una cupla con un cero en $Z_0=1/k$.
Su transformada Z será: $H(Z)=1-kZ$.
La transformada Z de su operador inverso $\boldsymbol{h_n^{-1}}$ será:

$$H(Z)^{-1}=\frac{1}{1-kZ}=1+kZ+k^2Z^2+k^3Z^3+k^4Z^4+k^5Z^5+...=\sum_{n=0}^{\infty}k^nZ^n$$

$$h_n^{-1}=TZ^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}k^nZ^n\}=(1,k,k^2,k^3,k^4,k^5,k^6,k^7,k^8,...)$$

Para obtener el desarrollo en potencias negativas de Z debemos sacar factor común $\frac{-1}{kZ}$:

$$H(Z)^{-1}=\frac{1}{1-kZ}=\frac{-1}{kz}\frac{1}{\left[1-\frac{1}{kz}\right]}=\frac{-1}{kz}\left(1+\frac{1}{kz}+\frac{1}{k^2z^2}+\frac{1}{k^3z^3}+\frac{1}{k^4z^4}+\frac{1}{k^5z^5}+...\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}k^{-n}Z^{-n}$$

$$\boldsymbol{h_n}=\left(...,\frac{-1}{k^6},\frac{-1}{k^5},\frac{-1}{k^4},\frac{-1}{k^3},\frac{-1}{k^2},\frac{-1}{k^1},\underset{\uparrow}{0}\right)=\left(...,-k^{-6},-k^{-5},-k^{-4},-k^{-3},-k^{-2},-k^{-1},\underset{\uparrow}{0}\right)$$

Si el cero está fuera del circulo unidad, es decir si $|Z_0|>1\Rightarrow|k|<1$, entonces la inversa estable será la causal. Por el contrario si el cero está dentro del circulo unidad, es decir si $|Z_0|<1\Rightarrow|k|>1$, entonces la inversa estable será la anticausal. En todos los casos las inversas serán de longitud infinita y asintóticamente decrecientes, por lo tanto en algún instante de tiempo la amplitud siempre alcanzará un valor de amplitud que esté por debajo del valor más pequeño que mi formato de grabación puede guardar y a los fines prácticos la longitud será finita.
Cuanto más próximo al círculo unidad se encuentre el cero, más tiempo le tomará a la inversa alcanzar un valor despreciable. Si el cero está sobre el círculo unidad no existirá inversa estable.

15. Generalice el concepto de fase mínima y de fase máxima para una señal de longitud arbitraria. ¿Cómo serán sus inversas estables?

Considerando que una secuencia de longitud finita arbitraria siempre se puede expresar como la convolución de dipolos, las conclusiones a las que arribamos para dipolos se pueden generalizar para secuencias de longitud arbitraria.
Si la transformada Z de una secuencia tiene todos los ceros fuera del círculo unidad, diremos que es de fase mínima, y su inversa será causal y estable. Por el contrario, si la transformada Z de una secuencia tiene todos los ceros dentro del círculo unidad, diremos que es de fase máxima, y su inversa será anticausal y estable.
Formalmente las inversas son siempre de longitud infinita, pero en la práctica siempre alcanzarán un valor de amplitud despreciable a partir del cual la podremos considerarlas nula.

16. ¿Cuando diremos que una señal es de fase mixta? ¿Cómo deberá ser su inversa para ser estable?

Cuando un sistema es causal, es decir cuando su salida actual depende de entradas pasadas, decimos que es un sistema con memoria. Por el contrario, cuando un sistema es anticausal,

es decir cuando su salida actual depende de entradas futuras, decimos que es un sistema sin memoria o anticipativo.
Tendremos sistemas que llamaremos no causales, en los cuales su salida actual dependerá de entradas pasadas y futuras, es decir tendrán ambas componentes, la anticipativa o sin memoria y la componente con memoria.
Diremos que una señal es de fase mixta cuando su tranformada Z tiene ceros tanto dentro como fuera del círculo unidad, en consecuencia su inversa estable deberá ser no causal, es decir deberá tener ambas componentes, la anticipativa o sin memoria y la componente con memoria.
En rigor matemático cuando la transformada Z de una señal o de una respuesta impulsiva, tiene un cero sobre el círculo unidad no admite inversa estable, sin embargo veremos como encontrar una solución de compromiso a este problema.

17. La forma más general de expresar la transformada Z de un sistema lineal e invariante es como fracciones racionales de polinomios $S(Z)=A(Z)/B(Z)$ (sistema ARMA). ¿Dónde deben estar los ceros y los polos de $S(Z)$ para que el sistema sea causal y estable? ¿Dónde deben estar los ceros y los polos para que el sistema sea causal estable y de fase mínima?

    Tengamos presente que tanto $A(Z)$ como $B(Z)$ son polinomios, es decir sólo tienen potencias positivas de Z, por lo tanto $A(Z)$ es causal, independientemente de donde estén sus ceros y sus polos. En el caso de $B(Z)$ para saber si es causal deberíamos pasarlo al numerador como un desarrollo en serie de potencias. Este desarrollo en serie de potencias será causal si los ceros de $B(Z)$, o los polos de $S(Z)$, están fuera del círculo unidad. Es decir que para que $S(Z)$ sea la transformada Z de un sistema causal y estable no importa dónde estén sus ceros, sólo importa que sus polos estén fuera del circulo unidad. Para que el sistema causal y estable sea de fase mínima, entonces $S(Z)^{-1}=B(Z)/A(Z)$ debe ser la transformada Z de un sistema inverso causal y estable, lo cual sólo ocurrirá si los ceros de $A(Z)$ están fuera del círculo unidad. Por lo tanto para que $S(Z)$ sea la transformada Z de un sistema causal, estable y de fase mínima tanto sus ceros como sus polos deben estar afuera del círculo unidad.

18. ¿Qué relación existe entre los sistemas de fase mínima y los sistemas físicos realizables e invertibles? ¿Porqué?

    Los sistemas físicos realizables deben ser causales. Si además el sistema físico realizable es invertible, su inversa, para que sea físicamente realizable, también debe ser causal. Esto sólo ocurrirá si el sistema físico realizable es de fase mínima.
    En conclusión, los sistemas físicos realizables e invertibles deben ser causales y de fase mínima.
    Una confusión frecuente es pensar que los sistemas causales son de fase mínima, recuerde que un sistema causal será de fase mínima solamente si los ceros de sus transformada Z están fuera del círculo unidad.