Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 11

Factorización Espectral

1. ¿Qué entiende por factorización espectral?

Como hemos mencionado anteriormente, una secuencia equivalente a una secuencia dada de longitud N , es cualquier otra secuencia de igual longitud, que posea el mismo espectro de amplitud pero distinto espectro de fase. Dado que el espectro de potencia de una secuencia es igual a su espectro de amplitud al cuadrado, y además que el espectro de potencia es igual a la transformada de Fourier de su autocorrelación, cuando una secuencia tiene el mismo espectro de amplitud también tendrá el mismo espectro de potencia y la misma autocorrelación.

Dada una secuencia de longitud N existirán 2^{N-1} secuencias equivalentes que tendrán el mismo espectro de amplitud, el mismo espectro de potencia, la misma auto-correlación, pero distinto espectro de fase.

De las 2^{N-1} secuencias equivalentes, sólo una será de fase mínima, sólo una será de fase máxima, y las restantes serán de fase mixta.

Ni el espectro de amplitud, ni el espectro de potencia, ni la auto-correlación, poseen información de la fase de señal. Existen consideraciones físicas por las cuales una señal debe ser causal e invertible, lo que es equivalente a decir que debe ser de fase mínima. De las 2^{N-1} secuencias equivalentes que comparten el mismo espectro de potencia, es de especial interés encontrar la secuencia de fase mínima equivalente; es decir aquella secuencia equivalente x_n que es de mínimo retardo y tiene todos sus ceros fuera del círculo unidad:

$$P(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|e^{i\phi} \times |X(\omega)|e^{-i\phi}$$

Se habla de factorización espectral porque queremos factorizar el espectro de potencia como el producto de la transformada de Fourier de la secuencia de fase mínima por la transformada de Fourier de la secuencia de fase máxima equivalente, para así encontrar la secuencia de fase mínima equivalente.

2. Explique el método de factorización espectral de las raíces.

Dada una secuencia real de fase mínima de longitud N con ceros en Z_k puntos fuera del círculo unidad, tendremos:

$$\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \Leftrightarrow X(Z) = x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2 + \dots + x_{N-1} Z^{(N-1)}$$

$$X(Z) = x_{N-1} (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_{N-1}) = x_{N-1} \prod_{k=1}^{N-1} (Z - Z_k) \quad |Z_k| > 1, \quad k = 1, N-1$$

La secuencia de fase máxima equivalente estará dada por la secuencia revertida, la cual tendrá sus ceros en los recíprocos conjugados de la secuencia de fase mínima equivalente:

$$\mathbf{x}_{(N-1)-n} = (x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_1, x_0) \Leftrightarrow Z^{(N-1)} X\left(\frac{1}{Z}\right) = x_{N-1} + x_{N-2} Z + \dots + x_0 Z^{(N-1)}$$

$$Z^{(N-1)} X\left(\frac{1}{Z}\right) = x_0 \left(Z - \frac{1}{Z_1^*}\right) \left(Z - \frac{1}{Z_2^*}\right) \cdots \left(Z - \frac{1}{Z_{N-1}^*}\right) = x_0 \prod_{k=1}^{N-1} \left(Z - \frac{1}{Z_k^*}\right) \quad \left|\frac{1}{Z_k^*}\right| < 1 \quad k=1, N-1$$

El polinomio de grado 2^{2N-2} asociado a la transformada Z de la auto-correlación $P(Z)$ estará dado por:

$$Z^{(N-1)} P(Z) = Z^{(N-1)} X(Z) X\left(\frac{1}{Z}\right) = x_{N-1} x_0 \prod_{k=1}^{N-1} (Z - Z_k) \prod_{k=1}^{N-1} \left(Z - \frac{1}{Z_k^*}\right)$$

En este polinomio los ceros se presentarán en grupos de a cuatro:

$$(Z - Z_o)(Z - Z_o^*) \left(Z - \frac{1}{Z_o^*}\right) \left(Z - \frac{1}{Z_o}\right)$$

Es decir, si está Z_o estará Z_o^* por ser un polinomio de coeficientes reales, y si están Z_o y Z_o^* también estarán $\frac{1}{Z_o^*}$ y $\frac{1}{Z_o}$ porque la auto-correlación es simétrica, es decir, el primer coeficiente del polinomio será igual al último, el segundo al penúltimo, el tercero al antepenúltimo, y así sucesivamente.

Lo que realmente nos interesa es que tendremos 2^{2N-2} ceros que se presentarán de a pares del siguiente modo:

$$\begin{array}{cc} Z_1 & \frac{1}{Z_1^*} \\ Z_2 & \frac{1}{Z_2^*} \\ Z_3 & \frac{1}{Z_3^*} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{N-1} & \frac{1}{Z_{N-1}^*} \end{array}$$

De cada par de ceros de una misma línea: Z_k de la primera columna y $\frac{1}{Z_k^*}$ de la segunda columna, deberémos tomar uno de los dos. Si tomamos los $N-1$ ceros de la primera columna, todos ellos fuera del círculo unidad, formaremos la transformada Z de la secuencia de fase mínima equivalente salvo factor de escala. Si tomamos los $N-1$ ceros de la segunda columna, todos ellos dentro del círculo unidad, formaremos la transformada Z de la secuencia de fase máxima equivalente salvo factor de escala. Si tomamos uno de cada par, pero combinamos algunos fuera con otros dentro de distintas líneas, formaremos $(2^{N-1} - 2)$ transformadas Z de secuencias equivalentes de fase mixta salvo factor de escala. Luego de calcular la productoria de los dipolos armados con los ceros seleccionados,

calculamos la transformada Z inversa para así obtener la secuencia que estamos buscando, salvo factor de escala. El factor de escala λ podremos determinarlo porque conocemos la auto-correlación a *lag* cero:

$$\Phi_{xx}(0) = \lambda^2 (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2)$$

Dijimos partir de la secuencia de fase mínima equivalente, pero en realidad no importa de cual de las 2^{N-1} secuencias equivalentes hayamos partido, la auto-correlación de cualquiera de ellas será la misma, y nos permitirá obtener los mismos 2^{2N-2} ceros, 2^{N-1} de ellos dentro del círculo unidad y 2^{N-1} fuera del círculo unidad.

Si nos cae un cero sobre el círculo unidad entonces en rigor matemático no existirá la secuencia de fase mínima equivalente.

Es importante observar que no todas las secuencias reales de longitud impar y simétricas son auto-correlaciones de una secuencia real. Para serlo deben cumplir con una condición adicional: que su transformada de Fourier tome valores reales positivos para todas las frecuencias. La transformada de Fourier de la autocorrelación es igual al espectro de potencia, es decir al espectro de amplitud al cuadrado, por lo cual debe ser positiva.

Aunque el método de factorización espectral de las raíces generalmente no se utiliza, posee un gran valor didáctico, ya que nos permite entender en detalle el problema que tratamos de resolver.

3. Explique el método de factorización espectral de Kolmogoroff.

Sea x_n una secuencia de fase mínima de longitud N . Su transformada Z factorizada en dipolos está dada por:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n Z^n = x_0 \prod_{k=1}^{N-1} (1 - \alpha_k Z) \quad \text{donde} \quad |\alpha_k| = \left| \frac{1}{Z_k} \right| < 1$$

Tomamos el logaritmo natural a la transformada Z y desarrollamos en serie de potencias:

$$\hat{X}(Z) = \ln \left(x_0 \prod_{k=1}^{N-1} (1 - \alpha_k Z) \right) = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \ln(1 - \alpha_k Z) = \ln(x_0) - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^n}{n} Z^n \right)$$

$$\hat{X}(Z) = \ln(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k^n}{n} \right) Z^n$$

La auto-correlación de x_n está dada por:

$$\Phi_{xx}(\tau) = p_\tau = (x_{-n}^* * x_n)_\tau \quad \tau = -(N-1), (N-1)$$

La transformada Z de la auto-correlación puede ser expresada sobre el círculo unidad del siguiente modo:

$$TZ\{\Phi_{xx}(\tau)\} = P(Z) = X^* \left(\frac{1}{Z} \right) X(Z)$$

Esto es válido únicamente en $Z = e^{-i\omega}$ pero usamos transformada Z para facilitar la demostración.

Tomamos logaritmo natural:

$$\ln(P(Z)) = \ln\left(X^*\left(\frac{1}{Z}\right)\right) + \ln(X(Z))$$

Donde $X^*\left(\frac{1}{Z}\right)$ factorizada en dipolos está dada por:

$$X^*\left(\frac{1}{Z}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* \frac{1}{Z^n} = x_0^* \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \alpha_k^* \frac{1}{Z}\right)$$

Sólo conjugamos los coeficientes x_n ya que sobre el círculo unidad es válida la siguiente igualdad: $Z^* = \frac{1}{Z}$.

Tomemos el logaritmo natural a $X^*\left(\frac{1}{Z}\right)$ y desarrollémoslo en serie de potencias:

$$\ln\left(X^*\left(\frac{1}{Z}\right)\right) = \ln(x_0^*) + \sum_{k=1}^{N-1} \ln\left(1 - \alpha_k^* \frac{1}{Z}\right) = \ln(x_0^*) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_k^*)^n}{n} \frac{1}{Z^n}\right)$$

$$\ln\left(X^*\left(\frac{1}{Z}\right)\right) = \ln(x_0^*) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\alpha_k^*)^n}{n}\right) \frac{1}{Z^n}$$

Reemplazamos en la expresión de $\ln(P(Z))$ y obtenemos:

$$\ln(P(Z)) = \ln(x_0^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\alpha_k^*)^n}{n}\right) \frac{1}{Z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k^n}{n}\right) Z^n$$

Tomemos la transformada Z inversa y pasemos al dominio del cepstrum:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= -\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\alpha_k^*}{n}\right)^n & \text{si } n < 0 \\ \hat{p}_n &= 2 \ln(x_0) & \text{si } n = 0 \\ \hat{p}_n &= -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k^n}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{aligned}$$

Es decir que en el dominio del cepstrum la componente de fase mínima de la autocorrelación fue mapeada a los subíndices positivos, mientras que la componente de fase máxima a los subíndices negativos. Para quedarnos con la componente de fase mínima debemos igualar a cero los subíndices negativos, y dividir por dos $\hat{p}_0$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= 0 & \text{si } n < 0 \\ \hat{x}_n &= \frac{\hat{p}_0}{2} & \text{si } n = 0 \\ \hat{x}_n &= \hat{p}_n & \text{si } n \geq 1\end{aligned}$$

Regresamos al dominio del tiempo y obtenemos la secuencia de fase mínima que estamos buscando:

$$\hat{X}(Z) = TZ\{\hat{x}_n\} = \ln(X(Z))$$

$$X(Z) = e^{\hat{X}(Z)}$$

$$x_n = TZ^{-1}\{e^{\hat{X}(Z)}\}$$

Utilizamos la transformada Z para demostrar el método de Kolmogoroff, pero para implementarlo numéricamente debemos utilizar transformada discreta de Fourier, es decir la transformada Z evaluada en puntos regularmente dispuestos sobre el círculo unidad.

Si disponemos de una secuencia de fase mixta y queremos obtener la secuencia de fase mínima equivalente debemos calcular la auto-correlación de la secuencia de fase mixta dada, la que será igual a la auto-correlación de la secuencia de fase mínima equivalente. O puede ser que nos den directamente la auto-correlación. Los siguientes pasos son los que debemos recordar. A partir de la auto-correlación debemos hacer lo siguiente:

1) Le agregamos a la autocorrelación una gran cantidad de ceros para evitar el *aliasing* en el dominio del cepstrum, ya que en este dominio todas las secuencias son de longitud infinita, luego tomamos el logaritmo natural a su transformada discreta de Fourier:

$$\hat{P}_k = \ln(P_k) = \ln(TDF\{p_n\})$$

Si el espectro de potencia se hace cero para alguna frecuencia ω_k entonces no podremos calcular el logaritmo natural. En rigor matemático la secuencia de fase mínima equivalente no existe. Una solución de compromiso para poder encontrar una solución aproximada es sumarle una pequeña cantidad positiva al espectro de potencia.

2) Calculamos la transformada discreta de Fourier inversa y llegamos al dominio del cepstrum:

$$\hat{p}_n = TDF^{-1}\{\hat{P}_k\}$$

3) Nos quedamos con la parte causal de la auto-correlación en el dominio del cepstrum, la cual corresponde a la componente de fase mínima:

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= 0 & \text{si } n < 0 \\ \hat{x}_n &= \frac{\hat{p}_0}{2} & \text{si } n = 0 \\ \hat{x}_n &= \hat{p}_n & \text{si } n \geq 1\end{aligned}$$

4) Regresamos al dominio del tiempo para obtener la secuencia de fase mínima equivalente

buscada:

$$\hat{X}_k = TDF\{\hat{x}_n\} = \ln(X_k)$$

$$X_k = e^{\hat{X}_k}$$

$$x_n = TDF^{-1}\{e^{\hat{X}(z)}\}$$

5) Por último, truncamos la secuencia obtenida a la longitud N de la secuencia original y así obtenemos la secuencia de fase mínima equivalente x_n .

4. Explique el método de factorización espectral del filtro Wiener inverso doble de retardo cero.

Un filtro inverso tendrá un espectro de amplitud igual al recíproco del espectro de amplitud de la secuencia que deseamos deconvolucionar, y un espectro de fase igual al espectro de fase de la secuencia que deseamos deconvolucionar cambiado de signo. De forma tal que al convolucionar la secuencia que deseamos deconvolucionar con el filtro inverso; en el dominio de las frecuencias, estaremos multiplicando espectros de amplitud y sumando espectros de fase, lo que nos dará un espectro de amplitud constante igual a 1 y un espectro de fase igual a cero. Estos son los espectros de amplitud y de fase de un impulso unitario a *lag* cero.

Si le calculamos el filtro inverso a un filtro inverso este tendrá un espectro de amplitud y un fase igual a los espectros de amplitud y fase de la secuencia original que deseábamos deconvolucionar.

Debemos recordar que la auto-correlación no tiene información de fase. Cuando diseñamos un filtro Wiener inverso, al colocar el impulso unitario a *lag* cero, estamos diseñando el filtro Wiener inverso que, de las 2^{N-1} secuencias equivalentes que tienen esta auto-correlación, deconvolucionará adecuadamente a la secuencia de fase mínima equivalente. Además debemos recordar que el filtro Wiener inverso con el impulso unitario de la salida deseada a *lag* cero es de fase mínima.

Al calcular el filtro Wiener inverso del filtro Wiener inverso con la salida deseada a *lag* cero estaremos obteniendo una secuencia con el mismo espectro de amplitud pero con un espectro de fase mínima, ya que esa será la fase del filtro inverso Wiener cuando colocamos el impulso unitario de la salida deseada a *lag* cero.

El procedimiento que debemos seguir para aplicar el método de factorización espectral del filtro Wiener inverso doble de retardo cero es el siguiente:

- 1) Dada la matriz de auto-correlación de la familia de secuencias equivalente Φ_{xx} diseñamos un filtro Wiener inverso f_n de fase mínima bien largo, para que se parezca lo más posible al filtro inverso exacto:

$$f = \Phi_{xx}^{-1} \Phi_{x\delta} = \Phi_{xx}^{-1} (x_0 000 \dots 0)^T$$

Como no conocemos x_0 colocamos en su lugar un 1 y obtendremos el filtro Wiener inverso buscado salvo factor de escala:

$$f = \Phi_{xx}^{-1}(1000 \cdots 0)^T$$

2) Diseñamos un filtro Wiener inverso y_n del filtro Wiener inverso f_n de la misma longitud N de la secuencia de fase mínima equivalente que deseamos encontrar:

$$y = \Phi_{ff}^{-1}(1000 \cdots 0)^T$$

3) Finalmente calculamos el factor de escala, lo aplicamos, y obtenemos la secuencia de fase mínima equivalente buscada:

$$\Phi_{xx}(0) = \lambda^2 (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{N-1}^2) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{N-1}^2)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Phi_{xx}(0)}{\sum_{n=0}^{N-1} y_n^2}}$$

$$x_n = \lambda y_n$$

Recordemos que cuando el espectro de potencia tiene ceros sobre el círculo unidad la matriz de autocorrelación Φ_{xx} será una matriz singular que no admite inversa o en el mejor de los casos una matriz mal condicionada. Para encontrar una solución de compromiso debemos utilizar preblanqueo para estabilizar la solución, es importante utilizar el mismo porcentaje de preblanqueo en el diseño de ambos filtros Wiener inversos.