Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 10

Transformada de Hilbert

1. Mencione las tres propiedades más importantes de la transformada de Hilbert.

 • Al aplicar la transformada de Hilbert a una señal $f(t)$ se produce un adelanto de su fase de $\frac{\pi}{2}$ radianes. La indicaremos de la siguiente manera: $TH\{f(t)\}=f^{\frac{\pi}{2}}(t)$.

 • Cuando una señal es causal en un dominio, ya sea tiempo o frecuencia, en el otro dominio la parte real es igual a la transformada de Hilbert de la parte imaginaria. Es decir que cuando una señal es causal en un dominio, en el otro dominio parte real y parte imaginaria estarán vinculadas por la transformada de Hilbert.

 • Si una señal es de fase mínima entonces el logaritmo natural de su espectro de amplitud estará vinculado con su espectro de fase por la transformada de Hilbert.

2. ¿Cuál es la transformada integral de Fourier de la función signo en tiempo?

 Se define a la función signo como:

$$sgn(t)=1 \quad si\, t\geqslant 0$$
$$sgn(t)=0 \quad si\, t<0$$

 La transformada integral de Fourier de la función signo está dada por:

$$sgn(t)\Leftrightarrow\frac{2}{i\,\Omega}$$

3. ¿Cuál es la transformada integral inversa de Fourier de la función signo imaginaria en frecuencia?

 La propiedad de simetría de la transformada integral de Fourier nos permite establecer la siguiente relación:

$$f(t)\Leftrightarrow F(\Omega) \quad \Rightarrow \quad F(t)\Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$$

 Aplicamos la propiedad de simetría a la función signo $sgn(t)$ en tiempo, para obtener la transformada inversa de Fourier de la función signo imaginaria en frecuencia:

$$\frac{-1}{\pi t}\Leftrightarrow i\, sgn(\Omega)=e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\Omega}{|\Omega|}}$$

4. ¿Cómo se define la transformada de Hilbert en el dominio de la transformada integral de Fourier?

 Se define a la transformada de Hilbert de una señal $f(t)$ como un filtro pasa-todo, que no

modifica su espectro de amplitud, y que introduce un cambio de fase de $+\frac{\pi}{2}$ para las frecuencias positivas, y de $-\frac{\pi}{2}$ para las frecuencias negativas. Al ser el espectro de fase una función impar, la transformada de Hilbert será Hermitiana, por lo tanto la transformada de Hilbert de una señal real seguirá siendo una señal real.
Si definiéramos la transformada de Fourier con el signo negativo en la exponencial compleja de la transformada inversa, entonces los signos de los corrimientos de fase de la transformada de Hilbert deberán cambiar, es decir deberíamos introducir un cambio de fase de $-\frac{\pi}{2}$ para las frecuencias positivas, y de $+\frac{\pi}{2}$ para las frecuencias negativas para producir una adelanto de la fase. Para evitar confusiones con los signos e independizarnos de manera en que definamos la transformada de Fourier, diremos que la transformada de Hilbert produce un adelanto de la fase de $\frac{\pi}{2}$. Esto implica que la transformada de Hilbert del $\sin(\Omega t)$ es igual al $\cos(\Omega t)$:

$$TH\{\sin(\Omega t)\}=\cos(\Omega t)$$

5. ¿Cómo se define la tranformada de Hilbert en el dominio del tiempo?

   A partir de la transformada inversa de Fourier de la función signo imaginaria en frecuencia podemos expresar a la transformada de Hilbert en tiempo del siguiente modo:

$$TH\{f(t)\}=\frac{-1}{\pi t}*f(t)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau \quad \Leftrightarrow \quad F(\Omega)\times i\times sgn(\Omega)=F(\Omega)e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\Omega}{|\Omega|}}$$

6. ¿Cómo se define la transformada generalizada de Hilbert en el dominio del tiempo?

   Un adelanto arbitrario ε de la fase se puede expresar mediante la transformada generalizada de Hilbert de la siguiente manera:

$$TGH\{f(t),\varepsilon\}=\cos(\varepsilon)\times f(t)+\sin(\varepsilon)\times TH\{f(t)\}$$

$$f^{\varepsilon}(t)=\cos(\varepsilon)\times f(t)+\sin(\varepsilon)\times f^{\frac{\pi}{2}}(t)\}$$

7. Cuando una onda se refleja con un coeficiente de reflexión complejo, no sólo se producida un cambio de amplitud sino también un cambio de fase. ¿De qué manera la transformada generalizada de Hilbert nos permite obtener el cambio de fase de la onda reflejada respecto de la onda incidente?

   Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad con un ángulo mayor al ángulo crítico, la expresión que nos permite obtener el coeficiente de reflexión nos da un valor complejo. En esta situación no se transmite energía a la capa subyacente, toda la energía es reflejada hacia arriba. Esto es llamado reflexión interna total, y a diferencia de las reflexiones pre-críticas en las que la forma de onda no cambia, en las reflexiones post-críticas la forma de la onda es distorsionada. Esto se produce por la multiplicación con un coeficiente de reflexión complejo r = |r| exp(iφ). En el caso de la reflexión interna total |r|=1, es decir la totalidad de la energía incidente se refleja. En el dominio de las frecuencias esto es equivalente a multiplicar por exp(iφ Ω/|Ω|) donde φ es el cambio de fase constante entre el rayo incidente y el reflejado. Un corrimiento de fase positivo para las frecuencias positivas y negativo para las frecuencias negativas produce un avance de la fase. El signo del corrimiento en fase debe cambiar para que la señal en frecuencia siga siendo hermitiana y para que en tiempo siga siendo real. Un coeficiente de reflexión r = i para las frecuencias positivas y r = –i para las negativas, corresponde a un avance de la fase en π/2, es decir a la transformada de Hilbert. Un corrimiento φ arbitrario de la fase corresponde a la transformada generalizada de Hilbert. El signo del corrimiento en fase depende del signo de la exponencial compleja utilizado en la definición de la transformada de Fourier.

8. Dada una función real $f(t)$ Cómo se define la función analítica $g(t)$ asociada a $f(t)$?

   Dada una función real $f(t)$ se define su función analítica asociada $g(t)$ como:

$$g(t)=f(t)-i\,TH\{f(t)\}$$

   Es decir que $\Re\{g(t)\}=f(t)$ es igual a $TH\{\Im\{g(t)\}\}=TH\{-TH\{f(t)\}\}=f(t)$

9. ¿Cómo se define la función envolvente de una señal real $f(t)$?

   Se define a la envolvente $E(t)$ de una función $f(t)$ como el módulo de su función analítica:

$$E(t)=|g(t)|=\sqrt{(f(t))^2+(TH\{f(t)\})^2}$$

   En aquellos puntos donde la función y su envolvente se tocan, la envolvente $E(t)$ será tangente a la función $f(t)$. Dado que la envolvente es claramente mayor o igual que la función en todo punto, la envolvente circunscribe a la función, propiedad que le da su nombre.

10. ¿Defina la amplitud instantánea de una señal real $f(t)$?

    La amplitud instantánea de una función $f(t)$ no es más que su envolvente $E(t)$.

11. ¿Defina la fase instantánea $\varphi_{inst}(t)$ de una señal real $f(t)$?

    Se define a la fase instantánea $\varphi_{inst}(t)$ de una señal $f(t)$ como:

$$\varphi_{inst}(t)=-arctg\left(\frac{f^{\frac{\pi}{2}}(t)}{f(t)}\right)$$

    La señal $f(t)$ y su transformada de Hilbert, se pueden expresar en función de su envolvente y de su fase instantánea del siguiente modo:

$$f(t)=E(t)\times\cos(\varphi_{inst}(t))$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t)=-E(t)\times\sin(\varphi_{inst}(t))$$

12. Defina la frecuencia instantánea de una señal real $f(t)$.

La frecuencia instantánea $\Omega_{inst}(t)$ de una señal $f(t)$ está dada por la derivada de la fase instantánea respecto del tiempo:

$$\Omega_{inst}(t)=\frac{d\varphi_{inst}(t)}{dt}$$

13. Si descomponemos una señal analógica $f(t)$ como la suma de una componente par más una componente impar. ¿Cómo se expresa esta descomposición en el dominio de la integral de Fourier?

Toda función $f(t)$ se puede descomponer como la suma de una componente par $f_p(t)$ más una componente impar $f_i(t)$:

$$f(t)=f_p(t)+f_i(t)$$

Donde:

$$f_p(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

$$f_i(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

Como sabemos la transformada de Fourier de una función par es real pura y la transformada de Fourier de una función impar es imaginaria pura, por lo tanto:

$$TF\{f(t)\}=TF\{f_p(t)+f_i(t)\}=F(\Omega)=\Re\{F(\Omega)\}+i\,\Im\{F(\Omega)\}=F_p(\Omega)+F_i(\Omega)$$

$$TF\{f_p(t)\}=\Re\{F(\Omega)\}=F_p(\Omega)$$

$$TF\{f_i(t)\}=i\,\Im\{F(\Omega)\}=F_i(\Omega)$$

14. ¿Qué relación existe entre la componente par y la componente impar de una señal causal?

Si una señal es causal es fácil de verificar que:

$$f_p=sgn(t)\times f_i$$

$$f_i=sgn(t)\times f_p$$

15. ¿Cómo se expresa esta relación en el dominio de la transformada integral de Fourier?

Tomando transformada integral de Fourier a las expresiones del ejercicio anterior, y recordando que la transformada integral de Fourier de la función signo es $sgn(t)\Leftrightarrow\frac{2}{i\,\Omega}$, obtenemos:

$$TF\{f_p(t)\}=\Re\{F(\Omega)\}=F_p(\Omega)=\frac{2}{i\,\Omega}*F_i(\Omega)=\frac{2}{i\,\Omega}*i\,\Im\{F(\Omega)\}$$

$$TF\{f_i(t)\}=i\Im\{F(\Omega)\}=F_i(\Omega)=\frac{2}{i\Omega}*F_p(\Omega)=\frac{2}{i\Omega}*\Re\{F(\Omega)\}$$

Recordando que cuando convolucionamos en el dominio de las frecuencias hay que agregar un factor $\frac{1}{2\pi}$, obtenemos:

$$\Re\{F(\Omega)\}=\frac{2}{i\Omega}*i\,\Im\{F(\Omega)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im\{F(\upsilon)\}}{\Omega-\upsilon}d\upsilon=-TH\{\Im\{F(\Omega)\}\}$$

$$\Re\{F(\Omega)\}=-TH\{\Im\{F(\Omega)\}\}$$

$$i\Im\{F(\Omega)\}=\frac{2}{i\Omega}*\Re\{F(\Omega)\}=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Re\{F(\upsilon)\}}{\Omega-\upsilon}d\upsilon=i\,TH\{\Re\{F(\Omega)\}\}$$

$$\Im\{F(\Omega)\}=TH\{\Re\{F(\Omega)\}\}$$

Recordemos que estas relaciones son válidas unicamente para señal causal.

16. ¿Cómo se define el operador ideal de la transformada discreta de Hilbert?

La respuesta impulsiva infinita, de la transformada discreta ideal de Hilbert, es lo que se denomina filtro de cuadratura q_n . Este operador posee en el dominio de la respuesta en frecuencia $Q(\omega)$, una discontinuidad en el origen $\omega=0$ y como consecuencia de extenderla a infinita y periódica para que sea discreto en tiempo, también presentará discontinuidades en $\omega=\pm\pi$.
En el intervalo $-\pi<\omega<\pi$ definimos a la respuesta en frecuencia del filtro de cuadratura como:

$$Q(\omega)=e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{|\omega|}}=i\frac{\omega}{|\omega|}=i\times sgn(\omega)$$

$$Q(\omega)=+i \quad \text{si} \quad 0<\omega<+\pi$$

$$Q(\omega)=-i \quad \text{si} \quad -\pi<\omega<0$$

Como las señales a las que le aplicaremos este operador no tienen frecuencias fuera del intervalo $-\pi<\omega<\pi$ porque satisfacen el teorema de Nyquist-Shannon, es válido extender esta respuesta en frecuencia a infinita y periódica de período 2π para que $\boldsymbol{q_n}$ sea discreto en tiempo. Para obtener los coeficientes q_n debemos resolver la integral que nos permite calcular los coeficientes de Fourier:

$$q_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\omega)e^{i\omega n}d\omega \qquad -\infty<n<\infty$$

Con lo que obtendremos:

$$q_n=0 \quad \text{si} \quad n \quad \text{es cero o par}$$

$$q_n = \frac{-2}{\pi\, n} \quad \text{si} \quad n \quad \text{es impar}$$

17. ¿Qué sucede con la respuesta en frecuencia del filtro de Hilbert discreto ideal q_n truncado en tiempo? ¿En qué sentido este filtro es óptimo? ¿Qué sucede con el ripple en frecuencia del filtro de Hilbert ideal truncado en tiempo?

    Obviamente para poder aplicar este operador debemos truncarlo a una longitud $2N+1$ a una distancia N del origen los suficientemente grande como para que alcance un valor de amplitud despreciable. Análogamente a lo que sucedía con el filtro pasa-bajo ideal truncado, este filtro truncado en tiempo, será óptimo en frecuencia en el sentido de los cuadrados mínimos, en la discontinuidad tomará el valor promedio de los límites por derecha y por izquierda, es decir $\hat{Q}(\omega)=0$, además presentará también el fenómeno de Gibbs:

    $$\hat{Q}(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} q_n \, e^{-i\omega n}$$

    Como habitualmente trabajaremos con ondas de banda limitada y valor medio cero, estas señales no tienen energía en las frecuencias $\omega \approx 0$ y $\omega \approx \pi$, el fenómeno de Gibbs no causará problemas importantes si truncamos el filtro a una longitud lo suficientemente grande. También podríamos considerar truncar a q_n con ventanas sin cortes abruptos como las utilizadas en el diseño de filtros pasa-banda lo que produciría la aparición de bandas de transición en las discontinuidades, aunque la respuesta en fase siempre será exacta. Sin embargo, como sucede con los filtros de frecuencias, lo habitual es calcular la transformada de Hilbert en el dominio de la transformada discreta de Fourier.
    Tengamos presente que en $\omega=0$ y $\omega=\pi$ donde se presenta una discontinuidad, $\hat{Q}(\omega)$ tiende al promedio de las límites por derecha y por izquierda, es decir a cero.

18. ¿Qué precauciones debemos tomar al aplicar la transformada de Hilbert en los dominios discretos de tiempo y frecuencia, es decir, qué precauciones debemos tomar al utilizar tranformada discreta de Fourier para definir la transformada discreta de Hilbert ?

    La utilización de la transformada rápida de Fourier para el cálculo de la transformada discreta de Hilbert permite hacer este cálculo de manera sumamente eficiente en el dominio de las frecuencias. Sabemos que multiplicar en el dominio de las frecuencias es más rápido que convolucionar en el dominio de los tiempos. Ya hemos aprendido que la convolución lineal en tiempo puede ser emulada en el dominio discreto de las frecuencias utilizando la transformada discreta de Fourier agregando ceros en tiempo a la señal antes de ir al dominio transformado, para así evitar los efectos de la convolución circular propios de la transformada discreta de Fourier. Si vamos a aplicar la trasformada de Hilbert a una señal de longitud N en el dominio de Fourier, debemos recordar que el filtro de cuadratura q_n es en rigor infinito en tiempo. Sin embargo, para una longitud M el filtro de cuadratura alcanzará un valor de amplitud que podremos despreciar. Como ya sabemos, debemos agregarle a la señal a la que deseamos calcular su transformada de Hilbert, antes de ir al dominio de Fourier, tantos ceros como sean necesarios para alcanzar la longitud N + M −1.

19. ¿Cómo prodría utilizarse la transformada discreta de Fourier para obtener de forma rápida y eficiente la transformada de Hilbert de la señal discreta f_n ? ¿Qué precauciones hay que tomar para que no se produzca aliasing en tiempo?

Partamos de la expresión de la función analítica discreta:

$$g_n = f_n - i \times TDH\{f_n\}$$

Tomemos a esta expresión la transformada discreta de Fourier:

$$TDF\{g_n = f_n - i \times TDH\{f_n\}\}$$

$$G_k = F_k - i \times i \times sgn(\omega_k) F_k = F_k (1 + sgn(\omega_k))$$

$$G_0 = 0$$
$$G_k = 2 \times F_k \quad \text{si} \quad 0 < \omega_k < \pi$$
$$G_{\frac{N+M-1}{2}} = 0$$
$$G_k = 0 \qquad \text{si} \quad \pi < \omega_k < 2\pi$$

Donde: $\omega_k = \frac{2\pi}{N+M-1} k$

Es decir que una manera eficiente de calcular la transformada de Hilbert de una secuencia f_n de longitud N , es agregarle una gran cantidad de ceros a f_n en la cola hasta alcanzar la longitud $N+M-1$, ir al dominio de la transformada discreta de Fourier, multiplicar las frecuencias positivas por 2 y las negativas por 0, anular las frecuencias $\omega_0 = 0$ y $\omega_{\frac{N+M-1}{2}} = \pi$ (si $N+M-1$ es par) , es decir $G_0 = 0$ y $G_{\frac{N+M-1}{2}} = 0$.

Tomar la transformada discreta inversa de Fourier, truncar el resultado a la longitud original N para así obtener la función analítica g_n , luego quedarnos con la parte imaginaria cambiada de signo para así obtener la transformada de Hilbert de f_n .

Como se explicó en la respuesta a la pregunta 18. para que no se produzca aliasing temporal como consecuencia de trabajar en el dominio discreto de las frecuencias y en consecuencia con convolución circular, debemos agregar una gran cantidad de ceros en la cola de f_n , antes de ir al dominio de la transformada discreta de Fourier .

20. ¿Qué relación existe entre los espectros de amplitud y fase de un dipolo de fase mínima?

Dado el dipolo de fase mínima $\mathbf{x_n} = (1, -\alpha)$ donde $|\alpha| < 1$.

Tomamos la trasformada Z:

$$X(Z) = 1 - \alpha Z$$

Tomamos el logaritmo natural a la transformada Z y lo desarrollamos en serie de potencias:

$$\hat{X}(Z) = \ln(1 - \alpha Z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} Z^n$$

Tomamos la transformada Z inversa y pasamos a un dominio de seudo-tiempos, conocido como *cepstrum*:

$$\hat{x}_n = 0 \qquad si\, n \leq 0$$

$$\hat{x}_n = -\frac{\alpha^n}{n} \qquad si\, n \geq 1$$

Es decir que $\hat{x}_n$ es una señal causal, por lo tanto la parte real y la parte imaginaria de su transformada de Fourier deben estar vinculados por la transformada de Hilbert:

$$\Re\{\hat{X}(\omega)\}=TH\{\Im\{\hat{X}(\omega)\}\}$$

Pero como:

$$\hat{X}(\omega)=\ln(X(\omega))=\ln|X(\omega)|+i\,arg\{X(\omega)\}$$

Entonces, si x_n es un dipolo de fase mínima se cumplirá:

$$\ln|X(\omega)|=TH\{arg\{X(\omega)\}\}$$

21. ¿Qué relación existe entre los espectros de amplitud y fase de una señal de fase mínima de longitud arbitraria N?

Dada una señal de fase mínima de longitud arbitraria N :

$\boldsymbol{x_n}=(x_0, x_1, x_3, \cdots, x_{N-1})$ sin pérdida de generalidad, sólo para simplificar el cálculo consideremos $x_0=1$.

Tomamos la trasformada Z:

$$X(Z)=\sum_{n=0}^{N-1} x_n Z^n=\prod_{k=1}^{N-1}(1-\alpha_k Z) \quad \text{donde} \quad |\alpha_k|<1$$

Tomamos el logaritmo natural a la transformada Z y lo desarrollamos en serie de potencias:

$$\hat{X}(Z)=\ln\left(\prod_{k=1}^{N-1}(1-\alpha_k Z)\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\ln(1-\alpha_k Z)=\sum_{k=1}^{N-1}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^n}{n}Z^n\right)$$

Tomamos la transformada Z inversa y pasamos a un dominio de seudo-tiempos, conocido como cepstrum:

$$\hat{x}_n=0 \qquad si\, n\leq 0$$

$$\hat{x}_n=-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\alpha_k^n}{n} \qquad si\, n\geq 1$$

Es decir que $\hat{x}_n$ es una señal causal, por lo tanto la parte real y la parte imaginaria de su transformada de Fourier deben estar vinculadas por la transformada de Hilbert:

$$\Re\{\hat{X}(\omega)\}=TH\{\Im\{\hat{X}(\omega)\}\}$$

Pero como:

$$\hat{X}(\omega)=\ln(X(\omega))=\ln|X(\omega)|+i\,arg\{X(\omega)\}$$

Entonces, si x_n es una señal de fase mínima de longitud arbitraria se cumplirá:

$$\ln|X(\omega)|=TH\{arg\{X(\omega)\}\}$$

22. ¿Qué es una transformada homomórfica?

Una transformada homomórfica involucra un mapeo no lineal a un nuevo dominio en el cual se aplican filtros lineales, para luego hacer el mapeo inverso y regresar al dominio original. Una transformada homomórfica utilizada con frecuencia consiste en tomar una señal definida en el dominio del tiempo, calcular su transformada de Fourier, luego calcular su logaritmo natural, y luego tomar la transformada de Fourier inversa, para así arribar a un nuevo dominio denominado *cepstrum*. La palabra *cepstrum* es un anagrama de la palabra s*pectrum*. Surge de invertir el orden de las primeras cuatro letras, reforzando así la idea de inversa del spectrum. La variable independiente en el dominio del *cepstrum* se denomina "*quefrency*". La *quefrency* se puede interpretar como una medida del tiempo, pero no en el sentido del dominio temporal. Se puede utilizar como un indicador del período en el que se encuentran los armónicos de una frecuencia fundamental, o como un indicador del ritmo de cambio de las diferentes bandas del espectro, etc. Esta transformada homomórfica tiene numerosas aplicaciones en procesamiento de señales de radar, sonar, sismogramas, voz, etc. Para antitransformar y regresar al dominio original se realiza el mapeo inverso, es decir, se toma la transformada de Fourier, luego la función exponenecial y finalmente la transformada de Fourier inversa. En la próxima clase veremos como utilizar esta transformada homomórfica para separar las componentes de fase máxima y de fase mínima de una señal.