Análisis de Señales

Preguntas Claves – Clase 1

Señales y Sistemas

1. ¿Qué es una señal?

   Llamaremos observable a cualquier magnitud física capaz de ser medida y registrada. Llamaremos señal a cualquier observable que en su variación espacial, temporal o respecto de cualquier otra cantidad, sea capaz de contener y transportar información. En este curso consideraremos que las señales varían respecto de una única variable independiente y que esta variable independiente es genéricamente el tiempo.

2. ¿Qué es un sistema?

   Diremos que un sistema es cualquier entidad capaz de generar, medir o modificar una señal. En este curso pondremos particular énfasis en los sistemas lineales e invariantes.

3. ¿Qué es una señal analógica?

   Una señal analógica es aquella que está definida en un dominio continuo (genéricamente en todos los puntos de un intervalo de tiempo). No confundir con función continua.

4. ¿Qué es una señal discreta?

   Si conocemos los valores que toma una señal, únicamente en instantes dispuestos regularmente en un intervalo de tiempo, diremos que la señal es discreta. Llamaremos Δt al intervalo de muestreo, es decir al tiempo que separa dos muestra o valores sucesivos.

5. ¿Qué es una señal digital?

   La precisión con la que la magnitud de una señal puede ser observada dependerá de las características de nuestro instrumento de observación. Mientras que la precisión con que una señal puede ser registrada dependerá del formato de grabación (entero, punto flotante, 4 bytes, 8 bytes, IBM, IEEE, etc.).
   Si la amplitud de una señal discreta solo puede ser medida y/o grabada con determina precisión, entonces la amplitud no podrá tomar cualquier valor, sino sólo aquellos valores determinados por la precisión del instrumento y por el formato de grabación. En este caso diremos que la amplitud está cuantizada y que la señal es digital.

6. ¿Qué es un conversor analógico-digital A/D?

   Frecuentemente las señales digitales con las que trabajamos provienen de la digitalización de señales analógicas. Esta tarea es realizada en forma electrónica por un dispositivo denominado conversor analógico-digital (A/D). El intervalo de muestreo Δt puede variar ampliamente, desde una muestra por día, o menos, hasta más de diez millones de muestras por segundo. Existen señales que son inherentemente discretas como aquellas involucradas en economía y en estudios demográficos.
   Si está interesado en los detalles del funcionamiento electrónico de estos dispositivos

diríjase al apunte que sobre este tema está disponible en la página de la materia.

7. ¿Qué es una señal determinística?

   Diremos que una señal es determinística cuando sea posible predecir el valor actual de la señal, a partir de sus valores pasados.
   Si tenemos un conocimiento detallado del proceso físico que genera la señal, entonces podremos construir y parametrizar un modelo fisico-matemático que nos permita predecir los valores de una señal determinística.

8. ¿Qué es una señal innovativa, aleatoria o estocástica?

   Algunas magnitudes físicas son por naturaleza aleatórias (física cuántica). Otras magnitudes físicas si bien son de naturaleza determinística, la complejidad del proceso físico que genera la señal es tan grande y/o nuestro conocimiento del proceso es tan pobre que nos veremos en la necesidad de tratarlas como señales aleatorias.
   Cuando no dispongamos de un modelo físico-matemático apropiado que nos permita predecir los valores de una señal diremos que la señal es innovativa, aleatoria o estocástica.
   Consideraremos que no es la naturaleza de la señal lo que determina su comportamiento determinístico o innovativo, sino nuestro conocimiento del proceso que genera la señal.
   Para poder hacer un análisis probabilístico de la señal deberemos disponer de un gran volumen de datos (una muestra exhaustiva de los datos).
   Utilizaremos dos metodologías de trabajo diferentes para analizar e interpretar nuestros datos. Si tenemos un conocimiento detallado del proceso observado y la cantidad de datos disponibles es relativamente pequeña, entonces consideraremos que la señal es determinística y la analizaremos como tal. Por el contrario, si nuestro conocimiento del proceso es pobre y la cantidad de datos disponibles es grande entonces, consideraremos que la señal es innovativa y haremos un análisis de ella utilizando herramientas estadísticas.
   Dado que el enfoque determínistico requiere de herramientas matemáticas menos sofisticadas y además, porque es el adecuado para un curso introductorio de análisis de señales, durante este curso consideraremos principalmente que las señales con las que trabajamos son determinísticas y veremos en las últimas clases una breve introducción sobre el análisis de señales aleatorias.

9. Si discretizamos, con un intervalo de muestreo Δt, dos sinusoides de igual amplitud y fase inicial, definidas en un dominio continuo; una de frecuencia Ω y la otra de frecuencia $\Omega \pm 2\pi k/\Delta t$; $k \in \mathbb{Z}$. ¿Cómo se comparan las sinusoides discretizadas?

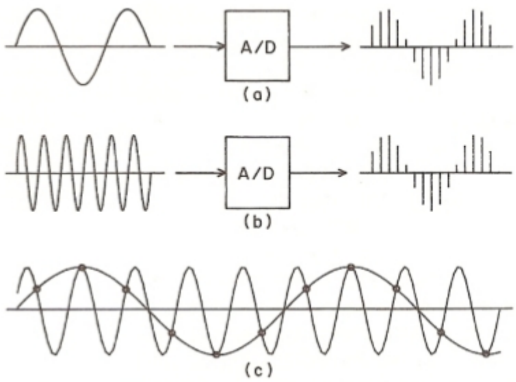
   Sea: $f(t)=\sin\left(\left(\Omega \pm \frac{2\pi k}{\Delta t}\right)t\right)$; $k \in \mathbb{Z}$

   Si la discretizamos con un intervalo de muestreo Δt, obtenemos:

$$f_n=f(n\Delta t)=\sin\left(\left(\Omega \pm \frac{2\pi k}{\Delta t}\right)n\Delta t\right)=\sin\left(\Omega n\Delta t \pm \frac{2\pi k}{\Delta t}n\Delta t\right)=\sin(\Omega n\Delta t \pm 2\pi k n)=\sin(\Omega n\Delta t)$$

$n \in \mathbb{Z}$

   Es decir que al discretizar con un intervalo de muestreo Δt, las muestras de todas las sinusoides, de igual amplitud y fase inicial, cuyas frecuencias difieran en un múltiplo de $2\pi/\Delta t$, tomarán los mismos valores.



10. Dada una señal digital con un intervalo de muestreo Δt. ¿Cómo define las frecuencias de muestreo y de Nyquist?

Definimos a la frecuencia de muestreo como:

$f_M = \frac{1}{\Delta t}$ frecuencia de muestreo en Hertz.
$\Omega_M = \frac{2\pi}{\Delta t}$ frecuencia angular de muestreo.
$\omega_M = \Omega_M \Delta t = 2\pi$ frecuencia angular digital de muestreo.

Definimos a la frecuencia de Nyquist como la mitad de la frecuencia de muestreo:

$f_N = \frac{1}{2\Delta t}$ frecuencia de Nyquist en Hertz.
$\Omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$ frecuencia angular de Nyquist.
$\omega_N = \Omega_N \Delta t = \pi$ frecuencia angular digital de Nyquist.

11. ¿Cuándo un sistema es lineal e invariante?

Diremos que un sistema es lineal cuando satisface las propiedades de superposición y proporcionalidad (o escalabilidad). Es decir, cuando la respuesta de la suma escalada de las causas es igual a la suma escalada de las respuestas individuales:

$$S\{\alpha a_n + \beta b_n\} = \alpha S\{a_n\} + \beta S\{b_n\}$$

Diremos que un sistema es invariante cuando al excitarlo con una misma señal en diferentes instantes de tiempo, el sistema responde con una misma señal independientemente del momento en que se lo excite. Es decir:

$$y_n = S\{x_n\}$$
$$y_{n-k} = S\{x_{n-k}\}$$

12. ¿Qué operación permite vincular la entrada y la salida de los sistemas lineales e invariantes?

Un sistema lineal e invariante queda perfectamente definido dando su respuesta impulsiva:

$$h_n = S\{\delta_n\}$$

Donde δ_n es la secuencia impulso unitario.
La salida de un sistema lineal e invaritante está definida por el producto de convolución entre su entrada y la respuesta impulsiva del sistema:

$$y_n = x_n * h_n = \sum_k x_k h_{n-k} = \sum_k h_k x_{n-k}$$

13. Descomponga una señal discreta, que excita a un sistema lineal e invariante, como una suma escalada de impulsos unitarios retardados. Aplique a esta descomposición las propiedades de superposición, proporcionalidad (o escalabilidad) e invarianza del sistema, y justifique la respuesta de la pregunta anterior.

$$x_n = \sum_k x_k \delta_{n-k}$$
$$y_n = S\{x_n\} = S\{\sum_k x_k \delta_{n-k}\}$$

Aplicamos la propiedad de superposición:

$$y_n = S\{x_n\} = \sum_k S\{x_k \delta_{n-k}\}$$

Aplicamos la propiedad es escalabilidad:

$$y_n = S\{x_n\} = \sum_k x_k S\{\delta_{n-k}\}$$

Finalmente aplicamos la propiedad de invarianza temporal:

$$y_n = S\{x_n\} = \sum_k x_k h_{n-k} = x_n * h_n$$

14. ¿Cuándo un sistema es estable?

Se dice que un sistema es estable si y solo si, su respuesta impulsiva es absolutamente sumable:

$$\sum_n |h_n| < \infty$$

Esta propiedad puede ser aplicada tanto a sistemas como a señales.

15. ¿Cuándo un sistema es causal?

La causalidad es una propiedad que deben cumplir todos los sistemas pasivos y físicamente realizable. Diremos que un sistema es causal si su respuesta impulsiva cumple la siguiente condición:

$$h_n = 0 \quad \text{para todo} \quad n < 0$$

Esta propiedad puede ser aplicada tanto a sistemas como a señales.

16. ¿Por qué los sistemas físicamente realizables deben ser causales?

Un sistema físico realizable debe necesariamente ser causal porque no puede entregar una señal de salida antes de que sea excitado en su entrada.

17. ¿Cuándo un sistema es invertible?

Dado un sistema $y_n = S\{x_n\}$ diremos que es invertible si existe el sistema inverso que cumpla con:

$$x_n = S^{-1}\{y_n\}$$

Un sistema lineal e invariante es invertible si existe la respuesta impulsiva del sistema inverso h_n^{-1} que satisfaga:

$$h_n^{-1} * h_n = \delta_n$$

Esta propiedad puede ser aplicada tanto a sistemas como a señales.

18. ¿Cuándo un sistema es "*moving average*", MA o promedio móvil?

Diremos que un sistema es MA de orden N, cuando su salida actual se puede expresar como una suma escalada de su entrada actual y de N entradas pasadas:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + \ldots + a_N x_{n-N}$$

19. ¿Cuándo un sistema es "*auto-regressive*", AR o autoregresivo?

Diremos que un sistema es AR de orden M, cuando su salida actual se puede expresar como la entrada actual más un suma escalada de M salidas pasadas:

$$y_n = x_0 + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3} + \ldots + b_M y_{n-M}$$

20. ¿Cuándo diremos que un sistema es ARMA?

Diremos que un sistema es ARMA de orden (N,M), cuando su salida actual se puede expresar como una suma escalada de su entrada actual y de N entradas pasadas más la suma escalada de M salidas pasadas:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + \ldots + a_N x_{n-N} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3} + \ldots + b_M y_{n-M}$$

Los sistema AR y ARMA siempre se podrán expresar como sistemas MA, pero si aplicamos el principio de parsimonia, elegiremos la forma de representar la salida actual que menos cantidad de parámetros involucre.
El principio de parsimonia es un principio metodológico, según el cual, e*n igualdad de condiciones, la explicación más sencilla suele ser la más probable*. Esto implica que, cuando dos teorías en igualdad de condiciones tienen las mismas consecuencias, la teoría más simple se debe preferir a la más compleja.