Trabajo Práctico Nº 10

Transformada de Hilbert

1) La *transformada de Hilbert* de una función $f(t)$ se define en el dominio del tiempo como:

$$\mathcal{H}\left\{f(t)\right\} = f(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right).$$

Se puede demostrar que la función $-\frac{1}{\pi t}$ se transforma al dominio de la frecuencia mediante:

$$-\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow i\, signo(\Omega) = e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\Omega}{|\Omega|}}.$$

Por lo tanto, si $f(t) \Leftrightarrow F(\Omega)$, en el dominio de la frecuencia la transformada de Hilbert se escribe:

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{H}\left[f(t)\right]\right\} = i\, signo(\Omega)\, F(\Omega)\,.$$

Utilice la función `ricker.jl` para generar una ondícula de Ricker de frecuencia central 30 Hz e intervalo de muestreo de 1 ms. Calcule su TDF y modifíquela apropiadamente en el dominio de la frecuencia para otener su transformada de Hilbert. Antitransforme y grafique en tiempo la ondícula de Ricker original y su transformada de Hilbert.

2) Dadas una señal real $f(t)$ y su transformada de Hilbert $\mathcal{H}\left\{f(t)\right\}$, se construye la *señal analítica* de $f(t)$ como la señal compleja $g(t)$,

$$g(t) = f(t) - i\,\mathcal{H}\left\{f(t)\right\} = f(t) * \left(\delta(t) + \frac{i}{\pi t}\right).$$

El módulo de la función analítica se denomina *función envolvente* y está dada por:

$$E(t) = |g(t)| = \sqrt{f(t)^2 + \mathcal{H}\left\{f(t)\right\}^2}.$$

La función envolvente $E(t)$ es tangente a $f(t)$ en cada punto de intersección y además, como es claramente mayor o igual a $f(t)$ en cada punto, circunscribe a $f(t)$. A partir del Ejercicio 1, calcule para la ondícula de Ricker considerada su función analítica y su envolvente. Grafique la ondícula original, su transformada de Hilbert, y su envolvente.

3) Tomando la transformada de Fourier de la señal analítica $g(t)$ asociada a $f(t)$ resulta

$$G(\Omega) = F(\Omega) - i\ [i\, signo(\Omega)\, F(\Omega)] = F(\Omega)\, [1 + signo(\Omega)]\,,$$

de donde:

$$G(\Omega) = \begin{cases} 2\,F(\Omega), & \text{si} \quad \Omega > 0; \\ F(\Omega), & \text{si} \quad \Omega = 0; \\ 0, & \text{si} \quad \Omega < 0. \end{cases}$$

Aproveche esta propiedad para calcular la respuesta en frecuencia de la señal analítica asociada a la ondícula de Ricker considerada en el Ejercicio 1. Luego antitransforme y tome la parte imaginaria cambiada de signo para obtener la transformada de Hilbert de la ondícula original. Grafique la ondícula original, su transformada de Hilbert, y su envolvente.

4) Sea una función $f(t)$ a la cual se le aplica un adelanto de la fase arbitrario de ε radianes. Puede probarse que la función resultante $f^{\varepsilon}(t)$ está dada por:

$$f^{\varepsilon}(t) = \cos(\varepsilon)\, f(t) + \operatorname{sen}(\varepsilon)\, \mathcal{H}\left\{f(t)\right\}.$$

Esta expresión se conoce como *transformada generalizada de Hilbert.* Oberve que la transformada de Hilbert se reduce entonces al caso particular dado por $\varepsilon = \pi/2$. Toda señal generada de esta manera posee la misma *función envolvente* $E(t)$.

Genere una ondícula de Ricker. Aplique corrimientos de fase desde 10° hasta 360° cada 10° y grafíquelos. Calcule también la señal analítica y a partir de ella la señal envolvente. Grafique la envolvente superpuesta a las señales con los diferentes corrimientos de fase.

►5) Escriba un función en `Julia` para calcular transformadas de Hilbert. Luego utilícela para hacer una programa que haga lo siguiente:

- Cargue la ondícula `wavelet` suministrada en la página web de la cátedra.
- Calcule su TDF.
- Tome la parte real y la parte imaginaria de la transformada.
- Calcule la transformada de Hilbert de la parte real de la TDF.
- Compruebe que es igual a la parte imaginaria de la TDF. Es decir, verifique computacionalmente que se cumple la siguente propiedad:

$$\mathcal{H}\left\{\operatorname{Re}\left[F(\omega)\right]\right\} = \operatorname{Im}\left[F(\omega)\right]$$