Trabajo Práctico Nº 9

Filtros inversos, deconvolución y filtro correlador

1) Dada la secuencia $a = (\underline{+2}, -1, +1, +3)$, calcule su inversa exacta a_n^{-1} haciendo uso de la transformada discreta de Fourier. Compruebe computacionalmente que la inversa obtenida es exacta según la convolución *circular*, es decir: $a_n \circledast a_n^{-1} = (\underline{1}, 0, 0, 0)$. ¿Qué sucede para $a = (\underline{+2}, -1, +1, -2)$?

2) Dada una secuencia a_n queremos hallar un filtro de longitud finita $\hat{f}_n$ tal que al convolucionarlo con a_n se obtenga la salida deseada d_n:

$$a_n * \hat{f}_n = d_n.$$

En notación matricial: $\mathbf{A}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{d}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de convolución de a_n. Si se impone la condición que el filtro sea óptimo en el sentido de los cuadrados mínimos: encontrar f_n que minimice la función objetivo $J = ||\mathbf{Af} - \mathbf{d}||_2^2$, se obtiene de $\frac{dJ}{d\mathbf{f}} = 0$ el resultado

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{d}.$$

En general $\mathbf{f}$ se conoce como *filtro Wiener*, *filtro conformador* o *shaping filter*. En particular, cuando la salida deseada es un impulso unitario, $d_n = \delta_n$, se habla de *filtro inverso Wiener* o *deconvolución impulsiva* (*spike deconvolution*).

a) Calcule la inversa de la secuencia de fase mínima $a = (\underline{1}, 0.6)$ y trúnquela en una longitud de cuatro muestras. Luego calcule el filtro inverso Wiener de igual longitud a la del filtro inverso truncado.

b) Convolucione la secuencia de fase mínima original con el filtro inverso truncado y con el filtro inverso Wiener. Calcule el error medio cuadrático del resultado de ambas convoluciones. ¿Cuál de los dos errores medios cuadráticos es menor?

Nota: utilice el código `filtro_wiener.jl` para controlar el resultado.

3) En el código `dcon_ond_equiv.jl` se calcula el filtro inverso Wiener de longitud 15 de ondículas equivalentes de fase mínima, mixta (lineal) y máxima de longitud 7. El código permite elegir la posición del impulso unitario de la salida deseada cambiando la variable `delay` para que la salida sea de fase mínima, lineal (mixta) o máxima. Una vez hallado el filtro, se convolucionan las ondículas con su filtro inverso Wiener obtenido (*deconvolución*). Para una salida deseada dada por un impulso unitario con un 1 en la primera muestra, ¿en qué caso el resultado es el esperado? Repita la deconvolución de las tres ondículas equivalentes, pero ahora coloque primero el valor 1 en la muestra central de la salida deseada del filtro y luego en la última muestra. ¿En qué casos el resultado es el esperado? Interprete y describa los resultados.

▶**4)** En el código `bad_cond_decon.jl` se genera una ondícula de fase mínima que luego se convoluciona con dipolos cuyos ceros se encuentran próximos al círculo unitario $|Z| = 1$. De esta manera, se obtiene una nueva ondícula con valores cercanos a cero en el espectro de amplitud, cuya matriz de autocorrelación estará mal condicionada. Grafique la ondícula original, la modificada y sus respectivos espectros de amplitud. Calcule el filtro inverso Wiener de longitud 15 de cada una de ellas. Deconvolucione las ondículas y analice los resultados. ¿En qué casos la inversa obtenida es aceptable?

5) La matriz de autocorrelación $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ suele ser una matriz mal condicionada, es decir, con valores propios que son ceros o próximos a cero que introducen inestabilidad numérica en su inversión y por lo tanto en el filtro Wiener. Este efecto puede ser mitigado definiendo una nueva función objetivo a minimizar:

$$J = ||\mathbf{Af} - \mathbf{d}\,||_2{}^2 + \mu\,||\mathbf{f}||_2{}^2,$$

donde se agrega un *término de regularización* con parámetro de compromiso (*trade-off*) μ. Imponiendo la condición: $\frac{dJ}{d\mathbf{f}} = 0$, obtenemos para el filtro inverso Wiener:

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mu\,\mathbf{I}\right)^{-1}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{d}.$$

Con valores pequeños de μ se logra mayor resolución pero menor estabilidad. Por el contrario, con valores grandes de μ se tendrá menor resolución pero mayor estabilidad. Existe entonces una relación de compromiso entre resolución y estabilidad. Cuando el operador de deconvolución es inestable, pequeñas perturbaciones en la entrada provocan grandes variaciones en la salida, lo que representa un efecto indeseable. El parámetro μ se suele definir en función del coeficiente de correlación a *lag* cero R_0 de la matriz de autocorrelación,

$$\mu = \frac{P}{100} \times R_0,$$

donde P es el porcentaje de *preblanqueo*. Para determinar μ, se prueba con distintos porcentajes de preblanqueo hasta lograr un resultado satisfactorio.

Mediante el código `wiener_tikhonov.jl` provisto en la página web de la materia, genere una ondícula de fase mínima igual que ejercicio anterior con ceros próximos al círculo unidad. Calcule el filtro inverso Wiener de longitud similar a la longitud de la ondícula. Sume una pequeña cantidad de *ruido blanco* a la ondícula antes de deconvolucionarla. Observe que la existencia de ceros en las altas frecuencias y la presencia de ruido aleatorio generan un nivel de ruido inaceptable en la ondícula deconvolucionada. Pruebe distintos valores de preblanqueo hasta alcanzar un nivel de ruido aceptable en la ondícula deconvolucionada en detrimento de la resolución. Grafique en tiempo y en frecuencia la ondícula, el filtro inverso Wiener, y la ondícula deconvolucionada, es decir, la convolución de la ondícula y el filtro inverso. Describa cómo se comparan los diferentes gráficos. **Responda**: ¿Cuál es el valor de preblanqueo P óptimo que arroja la mejor ondícula deconvolucionada para ruido blanco de 5 %?

6) En el archivo `traza.txt` provisto en la página web se brinda el dato de una traza sísmica que corresponde a la ondícula `wavelet` previamente utilizada y que está atrasada ciertas unidades de tiempo respecto del origen de la traza, y que se encuentra además inmersa en un ambiente ruidoso, lo que dificulta la determinación de su tiempo de arribo. Utilizando la ondícula `wavelet`, cree un *filtro correlador* y determine el tiempo exacto de llegada de `wavelet` considerando que el intervalo de muestreo Δt de la traza sísmica es 4 ms.