# Trabajo Práctico Nº 8

## Diseño de filtros digitales

**1)** En el código `ventanas.jl` se definen las siguientes ventanas en tiempo de longitud $N$ y se calculan sus respuestas en frecuencia:

**a)** *Rectangular*: $w_n = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1$

**b)** *Bartlett*: $w_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & \text{si} \quad 0 \leq n < \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1} & \text{si} \quad \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$

**c)** *Hann*: $w_n = 0{,}5 - 0{,}5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$

**d)** *Hamming*: $w_n = 0{,}54 - 0{,}46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$

**e)** *Blackman*: $w_n = 0{,}42 - 0{,}5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0{,}08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

Analice y compare el comportamiento del espectro de cada ventana en términos del ancho de su lóbulo principal, de la amplitud (rizado o *ripple*) y el decaimiento de sus lóbulos secundarios. ¿Cuál es la ventana de lóbulo principal más delgado? ¿Cuál posee lóbulos secundarios menores? ¿Cuál presenta un decaimiento mayor de los lóbulos secundarios? ¿Hay una única ventana que conjugue todas estas propiedades?

**2)** La respuesta impulsiva infinita $h_n$ de un filtro *pasa banda* rectangular, de fase cero y con frecuencias de corte $\omega_\mathrm{b}$ y $\omega_\mathrm{a}$, definido por:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq \omega < \omega_\mathrm{b}; \\ 1 & \text{si} \quad \omega_\mathrm{b} \leq \omega < \omega_\mathrm{a}; \\ 0 & \text{si} \quad \omega_\mathrm{a} \leq \omega < \pi; \end{cases}$$

está dada por:

$$h_n = \frac{\omega_\mathrm{a}}{\pi}\, sinc(\omega_\mathrm{a}\, n) - \frac{\omega_\mathrm{b}}{\pi}\, sinc(\omega_\mathrm{b}\, n).$$

Entonces, la respuesta impulsiva de un filtro pasa-bajos rectangular en tiempo se obtiene tomando $\omega_\mathrm{b} = 0$, y puede interpretarse como un seno cardinal truncado por una ventana rectangular, lo que introduce un importante rizado (*ripple*) en su respuesta en frecuencia. Defina un segundo filtro a partir de truncar la respuesta impulsiva (el seno cardinal) mediante una ventana de Hamming en lugar de una ventana rectangular.

Grafique las repuestas impulsivas de los dos filtros y de la ventana de Hamming. Compare también ambos filtros en tiempo y en frecuencia e interprete los resultados. Utilice el código `pasabajos-hamm.jl` provisto en la página web de la materia.

**3)** Se quiere diseñar un filtro pasa-bajos en el dominio del tiempo para separar una señal de interés de un ruido de frecuencia mayor. Escriba un código en `Julia` en el cual:

- **a)** Se genere una señal $s_n$ compuesta de una sinusoide de frecuencia $f_1$ (*dato*) y una segunda sinusoide que represante el ruido de frecuencia $f_2 \approx 3\,f_1$ y de menor amplitud. Elija un intervalo de muestreo $\Delta t$ tal que ambas sinusoides estén correctamente muestreadas.
- **b)** Trunque unas pocas muestras de los bordes de $s_n$ mediante una ventana de Bartlett.
- **c)** Diseñe un filtro pasa-bajos rectangular a partir de su respuesta impulsiva en tiempo $h_n$ y trúnquelo mediante una ventana de Hamming como el analizado en el Ejercicio 2. Elija una frecuencia de corte $f_c$ tal que $f_1 < f_c < f{\cdot}2$. Considere que la longitud del filtro sea al menos cinco veces menor a la de la señal.
- **d)** Filtre la señal (con ventana) mediante la convolución con el filtro truncado en tiempo.
- **e)** Grafique el dato, el ruido, la señal, la señal con ventana, la señal filtrada y el ruido estimado en tiempo y en frecuencia.
- **f)** Interprete los resultados, explicando las mejoras que produce haber truncado la señal por la ventana de Bartlett y haber truncado el filtro con la ventana de Hamming.

**4)** El espectro de potencia de un filtro pasa-bajos *Butterworth* de *orden* $\alpha$ está dado por:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)^{2\alpha}}$$

Diseñe un filtro Butterworth pasa-bajos de fase cero, de longitud $N = 51$, orden $\alpha = 10$ y frecuencia de corte $\omega_\mathrm{c} = \frac{\pi}{2}$, discretizando el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ y aplicando la transformada inversa discreta para obtener su respuesta impulsiva. Realice *zero padding* y grafique el espectro de amplitud. Compárelo con el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ original. Repita el procedimiento para $N = 11$ y $\alpha = 80$. Explique cómo varía el espectro de amplitud calculado respecto del espectro dado cuando variamos el orden del filtro.

*Nota*: Un filtro de frecuencias apropiado es aquel que combina un razonable decaimiento en tiempo de los coeficientes de su respuesta impulsiva, una adecuada atenuación de las frecuencias no deseadas, y una distorsión mínima para las frecuencias restantes. El espectro de potencia $|H(\omega)|^2$ del filtro Butterworth satisface en $\omega = 0$, $\frac{d^n}{d\omega}|H(\omega)|^2 = 0$ para $n = 1, \ldots, \alpha$. A esta propiedad se le da el nombre de *máximo aplanamiento*. El espectro de amplitud toma un valor de $1/\sqrt{2}$ o $-3$ dB en $\omega = \omega_\mathrm{c}$, independientemente del orden del filtro. Los filtros Butterworth de orden bajo tienen una muy buena representación en tiempo, es decir son *filtros cortos*. Los de orden alto tienen una mejor representación en el dominio de las frecuencias, pero resultan más largos en tiempo.

**5)** Genere una ondícula transitoria de la forma:

$$a(t) = e^{-f\,t}\sin(2\pi f t)$$

con $f = 1$ Hz y $t = (0 : 0.1 : 5)$ s. Calcule su transformada discreta de Fourier y multiplíquela por la respuesta en frecuencia de un filtro Butterworth con frecuencia de corte $\omega_\mathrm{c} = 0.3\,\pi$ y orden $\alpha = 10$. Luego calcule la transformada inversa para obtener la ondícula filtrada, aplique *zero padding* y obtenga también el espectro de la ondícula filtrada. Repita lo anterior agregando primero $N$ ceros al final de la ondícula y luego agregando $N$ ceros adelante y $N$ al final. Analice los resultados. ¿Qué mejora produce agregar ceros y por qué? Genere ahora un filtro de orden $\alpha = 30$ y repita los tres casos anteriores (sin agregar ceros, agregando $N$ ceros atrás, y agregando $N$ ceros adelante y $N$ ceros atrás). Analice nuevamente los resultados.

> ***Nota***: Los filtros de orden alto requieren de un importante número de muestras con el fin de resolver su zona de transición angosta. En caso contrario, la zona de transición no es bien representada y las muestras pueden asimilarse a las de un filtro rectangular, obteniéndose un rizado mayor que el esperado. Observe además que para filtros de orden bajo y agregando ceros la respuesta es igual a la deseada. Sin embargo, para filtros de orden superior aumenta severamente el aliasing temporal produciendo rizado en la banda de reyección. Una zona de transición más angosta es lograda a expensas de la banda de reyección con mayor rizado.
> **Existe siempre una relación de compromiso entre la longitud del filtro en tiempo, la amplitud del rizado, y el ancho de la zona de transición entre las bandas de paso y de rechazo.**

**►6)** Escriba un código en `Julia` en el cual:

- **a)** Cargue la ondícula `wavelet`. Suponga que $\Delta t = 0{,}5$ s.
- **b)** Sume ruido de alta frecuencia y baja amplitud a la ondícula cargada.
- **c)** Diseñe un filtro pasa-bajos de Butterworth en el dominio de las frecuencias para filtrar el ruido.
- **d)** Filtre la señal *en el dominio de la frecuencia* con el filtro pasa-bajos de Butterworth diseñado a partir de la multiplicación de las respuestas en frecuencia.
- **e)** Grafique el dato original, el dato con ruido y el dato filtrado en tiempo.
- **f)** Grafique el dato original, el dato con ruido, el filtro y el dato filtrado en frecuencia.