Trabajo Práctico Nº 7 - Parte A

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

1) Considere el operador de promedio pesado de longitud $N = 3$:

$$y_n = \frac{1}{4}(x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad h_n = (\frac{1}{4}, \underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}).$$

Utilizando el código `Julia` `zeropad.jl`, agregue ceros al final de h_n, calcule y grafique el espectro de amplitud de h_n para distintos tamaños N de la TDF: $N = 3, 10, 50$.
Nota: Agregar ceros sobre el final de la respuesta impulsiva se denomina *zero padding.* Se logra así interpolar la respuesta en frecuencia. Esto es fundamental para una interpretación adecuada del espectro, ya que disminuye la ambigüedad que puede surgir debido a su discretización. Observe que el *zero padding* no disminuye el ancho de los lóbulos en el espectro de amplitud, es decir, no aumenta la resolución espectral.

2) La siguiente función se denomina *ondícula de Ricker* y es frecuentemente utilizada para modelar fuentes de carácter sísmico:

$$r(t) = \left[1 - 2\,(\pi f_0 t)^2\right] e^{-(\pi f_0 t)^2}.$$

En esta fórmula, f_0 se denomina frecuencia central o pico. La transformada de Fourier de la ondícula de Ricker posee además una expresión analítica conocida para $f < f_N$ dada por:

$$R(f) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{f^2}{f_0^3}\right) e^{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}.$$

Utilice la función `ricker.jl` y el código `plot-ricker.jl` provistos en la página de la materia, y genere una ondícula de Ricker de frecuencia central 50 Hz e intervalo de muestreo de 2 ms. Calcule su TDF con `Julia`, y obtenga el espectro de amplitud. Grafique la ondícula de Ricker y el espectro de amplitud a partir de la expresión analítica de la respuesta en frecuencia y también por medio de la la TDF para controlar que coinciden. Varíe la frecuencia central e interprete los resultados. ¿Observa que se produce *aliasing*?

3) Genere una ondícula de Ricker con frecuencia central 50 Hz y 1 ms de intervalo de muestreo. Sume ruido aleatorio de baja amplitud para contaminar la señal utilizando la función `rand()`.

- **a)** Para mitigar el ruido, convolucione la ondícula contaminada con el operador de promedio pesado $h_n = (\frac{1}{4}, \underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4})$. Grafique la ondícula limpia, el ruido aleatorio, la ondícula contaminada, y el resultado filtrado. ¿Quitó el operador completamente el ruido agregado?
- **b)** Calcule los espectros de amplitud de la ondícula de Ricker, el ruido, la ondícula con ruido, y la ondícula filtrada. Grafique los cuatro espectros. ¿Qué información muestran estos gráficos? ¿Qué parte del espectro se filtró y qué parte no?

4) Se quiere diseñar un filtro paso bajos discreto en tiempo de N coeficientes reales, de fase cero y que permita el paso de frecuencias menores a la mitad de Nyquist y rechace el resto. Es decir, se busca un filtro h_n tal que su respuesta en frecuencia sea:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{si} \quad \omega > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Para ello, se deben tomar muestras en frecuencia $H_k = H(\omega_k) = H(\frac{2\pi}{N}k)$ y a partir de ellas definir el filtro en tiempo h_n. Recuerde que para que los N coeficientes del filtro sean reales, $H(\omega)$ debe ser de período 2π y hermítica. Una vez obtenidos los coeficientes del filtro en tiempo, hay que realizar *zero padding* para calcular la respuesta en frecuencia real del filtro y compararla con la respuesta en frecuencia del filtro teórica deseada $H(\omega)$ sobre la que se tomaron muestras. En la página de la matería hay códigos en `Julia` para cada una de las tres formas de diseñar el filtro que se enumeran a continuación:

a) Tomando N muestras equidistantes de $H(\omega)$ entre 0 y 2π, y calculando su TDF inversa para obtener los coeficientes del filtro en tiempo h_n. Notar que las N muestras en tiempo así obtenidas corresponden a tiempos positivos y deben ser reordenadas para que la respuesta impulsiva del filtro sea de fase cero.

b) Tomando muestras equidistantes de $H(\omega)$ en frecuencia entre 0 y 2π y aplicando un corrimiento de fase lineal para obtener un filtro de fase cero. Para ello utilice el *Teorema del corrimiento de fase* visto en la práctica anterior.

c) Aprovechando la paridad del filtro tanto en frecuencia como en tiempo y tomando solamente $M+1$ muestras de $H(\omega)$ entre 0 y π para calcular los $M+1$ coeficientes diferentes del filtro en tiempo (los otros M coeficientes están repetidos por paridad):

$$h_n = \frac{1}{N}\left[H_0 + 2\sum_{k=1}^{M} H_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right)\right], \quad n = 0, \ldots, M.$$

Pruebe con diferentes longitudes de filtro ($N = 7, 21, 101$). Observe el fenómeno de *Gibbs*: el *rizado* (*ripple*) máximo se mantiene aproximadamente constante (8.9 %) independientemente del número de muestras del filtro.

►5) Genere la señal $s_n = s_n^1 + s_n^2$ compuesta por dos sinusoides, s_n^1 de 20 Hz y amplitud 1.0, y s_n^2 de 140 Hz y amplitud 0.5. Simule un tiempo total de 5 períodos de la señal de menor frecuencia s_n^1 y utilice un intervalo de muestreo adecuado para que la señal s_n^2 de mayor frecuencia esté correctamente muestreada según el criterio de Nyquist. Defina un filtro pasabajos con alguna de las implementaciones analizadas en el ejercicio 4 *eligiendo una frecuencia de corte adecuada* y aplíquelo en el dominio del tiempo para filtrar la componente s_n^2. Grafique y analice la señal, el filtro, y los resultados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia (en Hz) con *zero padding*.