

Trabajo Práctico N° 6

Discretización de una señal analógica

1) En la Figura 1 se muestra un par de transformadas de Fourier dado por la función cajón (o *boxcar*) y por la función *seno cardinal* ($\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$).

- La transformada de Fourier de la función cajón en tiempo es la función seno cardinal en frecuencia (salvo una constante):

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -t_0 < t < t_0; \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \Leftrightarrow F(\Omega) = 2t_0 \frac{\text{sen}(\Omega t_0)}{\Omega t_0}$$

- Si ahora en tiempo tenemos la función seno cardinal (salvo una constante especialmente elegida), por la *propiedad de simetría* se puede demostrar que su transformada de Fourier es la función cajón en frecuencia:

$$f(t) = \frac{\Omega_0}{\pi} \frac{\text{sen}(\Omega_0 t)}{\Omega_0 t} \Leftrightarrow F(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\Omega_0 < \Omega < \Omega_0; \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Considere una función cajón en tiempo de longitud $\Delta T = 2t_0$. Sea $\Delta\Omega$ la distancia entre los dos primeros cruces por cero de la función sinc $F(\Omega)$.

- Demuestre que $\Delta T \Delta\Omega = 4\pi$. ¿Qué ocurre en los casos $\Delta T \rightarrow 0$ y $\Delta T \rightarrow \infty$?
- Utilice el código `boxcar.jl` en Julia provisto en la página de la materia para graficar las funciones en ambos dominios para diferentes valores de ΔT . Interprete los gráficos.

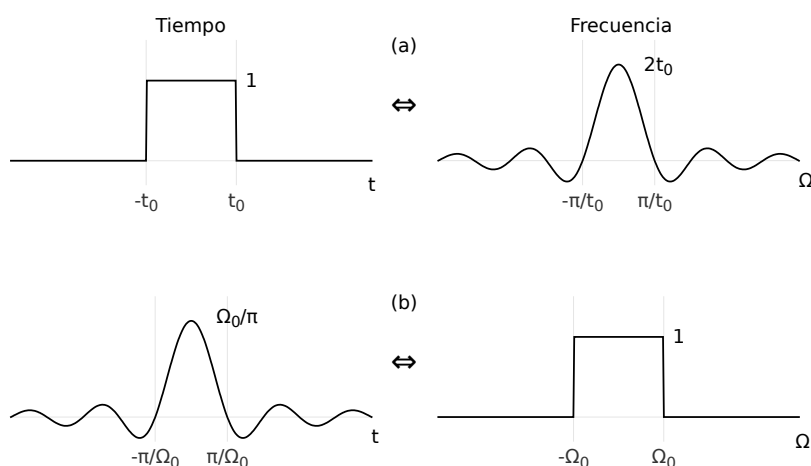


Figura 1: Par transformado función cajón y seno cardinal.

2) Sea la función cajón extendida como una función periódica con período $T > 2t_0$.

a) Demuestre que los coeficientes de su serie de Fourier están dados por:

$$c_0 = \frac{2t_0}{T}, \quad c_k = \frac{2t_0}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi}{T}kt_0\right), \quad k \geq 1.$$

b) Mediante un código en **Julia**, realice la aproximación de la función cajón $f(t)$ truncando su serie de Fourier para diferentes valores de orden máximo k_{max} . Grafique los cosenos que conforman la base de este espacio de funciones que aproximan $f(t)$, los valores de los coeficientes c_k , y la aproximación de la función cajón obtenida. Interprete los resultados.

►3) Considere el par transformado de Fourier de la *función de muestreo* (también conocida como *función peine* o *función shah*) a Δt constante:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad \Leftrightarrow \quad P(\Omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t}k\right).$$

La multiplicación de una señal continua (o análoga) $x_a(t)$ por la función peine produce una señal discreta x_n con intervalo de muestreo Δt :

$$x_a(t) \times p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(t - n\Delta t) \equiv x_n.$$

Si $X_a(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $x_a(t)$, demuestre que la transformada de Fourier de la función discretizada x_n está dada por:

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - \frac{2\pi}{\Delta t}k\right).$$

¿En qué se diferencian $X_d(\Omega)$ y $X_a(\Omega)$? ¿Qué nos dice $X_d(\Omega)$ respecto a las consecuencias de digitalizar una señal en tiempo?



4) De las cuatro combinaciones posibles entre variables discretas y continuas, surgen cuatro tipos diferentes de transformadas de Fourier, (Figura 2):

- a) Función *continua* en tiempo $\Leftrightarrow$ función *continua* en frecuencia.
- b) Función *continua y periódica* en tiempo $\Leftrightarrow$ función *discreta* en frecuencia.
- c) Función *discreta* en tiempo $\Leftrightarrow$ función *continua y periódica* en frecuencia.
- d) Función *discreta y periódica* en tiempo $\Leftrightarrow$ función *discreta y periódica* en frecuencia.

Escriba las fórmulas de las transformadas de Fourier directas (o de *análisis*) e inversas (o de *síntesis*) correspondientes a cada uno de estos cuatro casos y asígneles el nombre con el que las hemos presentado en el curso.

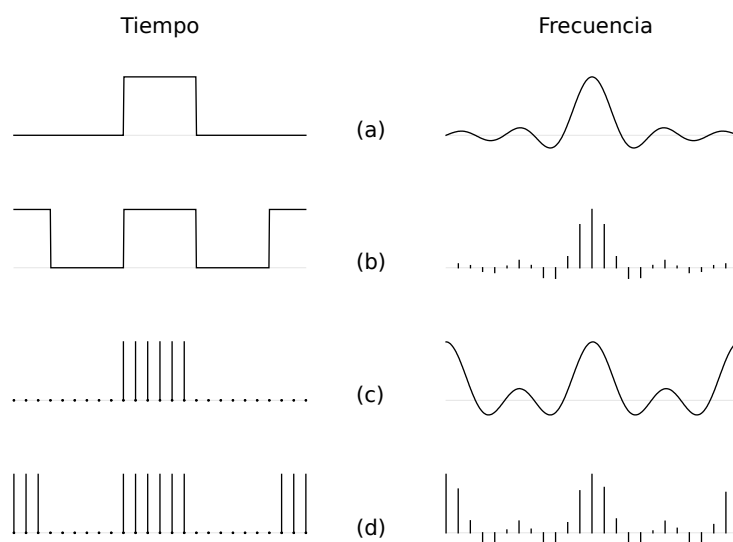


Figura 2: Cuatro clases de la transformada de Fourier.