Trabajo Práctico N°5

Transformada discreta de Fourier

1) Dada la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ correspondiente a un SLI cuya respuesta impulsiva es h_n, definimos la *transformada discreta de Fourier* (TDF) a partir de tomar N muestras equidistantes en frecuencia, $\omega_k = \dfrac{2\pi}{N}k$, con $k = 0, \ldots, N-1$:

$$H(\omega_k) = H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n}\,.$$

A partir de esta definición, la *transformada discreta de Fourier inversa* (TDFI) resulta:

$$h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k\, e^{+i\frac{2\pi}{N}k\,n}.$$

El módulo del la TDF se denomina *espectro de amplitud*, y su argumento *espectro de fase.*

$$\begin{aligned} |H_k| &: \quad \text{Espectro de amplitud} \\ \arg(H_k) &: \quad \text{Espectro de fase} \end{aligned}$$

Pruebe que la TDFI devuelve una función discreta *periódica* de período N en el dominio del tiempo; es decir, $h_n = h_{n+N}$.

2) Demuestre que si **la respuesta impulsiva** h_n **es real**, entonces:

- $H_{-k} = H_k^*$ (*propiedad hermítica*).
- La parte real de su TDF es par y la parte imaginaria es impar.
- El espectro de amplitud es par y el espectro de fase es impar.
- Si además h_n es par, entonces la TDF es real.

3) a) Dada la respuesta impulsiva h_n, $n = -M, \ldots, M$ real y par, con $N = 2M+1$ elementos, demuestre que su TDF se puede escribir como:

$$H_k = h_0 + 2\sum_{n=1}^{M} h_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right)\,.$$

b) Dada la TDF H_k, $k = -M, \ldots, M$ real y par, con $N = 2M+1$ elementos, demuestre que su TDF inversa se puede escribir como:

$$h_n = \frac{1}{N}\left[H_0 + 2\sum_{k=1}^{M} H_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right)\right]$$

4) La suma de los cuadrados de las amplitudes de una señal es conocida como la *energía* de la señal. Pruebe mediante un código en `GNU-OCTAVE` que la secuencia $a = (\underline{1}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ cumple con el *Teorema de Parseval*, que establece que la TDF conserva la energía de la respuesta impulsiva salvo por un factor N (número de muestras).

5) Sea el operador de promedio móvil dado por la secuencia $a_n = (\frac{1}{4}, \underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4})$. Calcule su transformada Z y luego, a partir de ella, su respuesta en frecuencia $A(\omega)$. Tome ahora tres muestras equiespaciadas de $A(\omega)$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ para obtener $A_k = A(\omega_k)$. Grafique $A(\omega)$ vs. ω y A_k vs. w_k. Grafique los valores de w_k considerados en el plano complejo. Interprete y relacione todos los gráficos entre sí. Por último, calcule la TDF de a_n por medio de un código `GNU-OCTAVE` y verifique el resultado obtenido. ¿Cómo interpreta el vector arrojado por la línea de código: `fft([0.25 0.5 0.25])`?

6) Escriba un código en `GNU-OCTAVE` que cargue la ondícula `wavelet` provista en la página web de la materia, calcule su TDF y grafique su espectro de amplitud y fase. Calcule también la TDF inversa y constate que es igual a la ondícula de entrada.

✓**7)** La TDF de una señal retardada τ unidades de tiempo está relacionada con la transformada discreta de Fourier de la señal original por:

$$\text{TDF}\left\{x_{t-\tau}\right\}_k = \text{TDF}\left\{x_t\right\}_k \; e^{-i\frac{2\pi}{N}\tau k}$$

Este resultado, que muestra que una señal retardada en τ unidades de tiempo sufre un corrimiento de fase *lineal* $\phi(w_k) = \frac{2\pi}{N}\tau k$, se denomina *teorema del corrimiento de fase*. Dada la secuencia de 4 muestras $h_n = [\underline{2}, 1, 0.5, 3]$, calcule su TDF, aplique un corrimiento de fase lineal con $\tau = 1$ y obtenga su TDF inversa. Verifique que la secuencia obtenida es una versión **atrasada** en τ unidades de tiempo de la original. Controle el resultado utilizando el código en `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia.

8) Sea la secuencia

$$h_n = (\underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Este tipo de secuencias se denominan de *fase lineal*, debido a que pueden interpretarse como una secuencia de fase cero (par) retardada ciertas unidades de tiempo (4, en este ejemplo). Interprete el código `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia en el que se encuentra la secuencia de fase cero utilizando el teorema de corrimiento de fase y luego, a partir de ella, se encuentra la secuencia adelantada en una unidad de tiempo respecto de la de fase cero.

Convolución circular y correlación cruzada

9) El *teorema de la convolución* afirma que la operación de convolución en el dominio del tiempo es análoga al producto de las transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia. Para las señales discretas, debido a su periodicidad, se debe distinguir entre *convolución lineal* y *convolución circular*. Sean:

$$a_t = (\underline{1}, -3, 5, -9), \quad b_t = (\underline{-7}, -1, 3, 8).$$

a) Calcule las convolución lineal $a * b$ y la convolución circular $a \circledast b$ entre las dos secuencias.

b) Mediante un código en `GNU-OCTAVE`, transforme a_t y b_t al dominio de las frecuencias mediante la TDF, multiplique, antitransforme, y compruebe que recupera el resultado de las convoluciones en tiempo.
Ayuda: Para el caso de la convolución lineal, note que debe agregar ceros antes de transformar para obtener una TDF de tamaño 7.

10) Hemos visto que la convolución lineal es conmutativa. Sean $a = (\underline{1}, 3, 0, 2)$ y $b = (\underline{1}, 0, 2, 2)$. Calcule la convolución circular entre a y b y entre b y a. ¿Es conmutativa la convolución circular? Puede comprobar los resultados con el código `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia.

11) Dadas dos señales discretas a_t y b_t, se define la *correlación cruzada* entre a y b como:

$$\phi_{ab}(\tau) = a^*_{-\tau} * b_\tau = \sum_n a^*_{n-\tau}\, b_n = \sum_n a^*_n\, b_{n+\tau}.$$

Sean las secuencias $a = (\underline{2}, -3, 6, -8)$ y $b = (\underline{-9}, -2, 1, 7)$. Calcule:

a) La correlación cruzada entre a y b y entre b y a.

b) La correlación cruzada circular entre a y b y entre b y a.

c) Constate que en ambos casos se cumple que: $\phi_{ba}(\tau) = \{\phi_{ab}(-\tau)\}^*$.

✓**12)** La *autocorrelación* está dada por la correlación cruzada de una secuencia consigo misma. Sea $a = (\underline{2}, -3, 6, -8)$. Mediante un código `GNU-OCTAVE`:

a) Calcule su autocorrelación en tiempo.

b) Calcule la TDF de la autocorrelación.

c) Calcule el espectro de amplitud $|A_k|$ y compruebe que la TDF de la autocorrelación está dada por el *espectro de potencia* $|A_k|^2$.

Preguntas claves

I) ¿Cuáles son las consecuencias de discretizar el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia?

II) En el dominio de la frecuencia la operación análoga a la convolución en tiempo es la multiplicación (es decir, se deben multiplicar los espectros de amplitud y sumar los espectros de fase). ¿Cuál será entonces la operación análoga en el dominio de la frecuencia a la correlación cruzada en tiempo?

III) ¿Qué representa en el dominio de la frecuencias la TDF de la autocorrelación de una dada secuencia?