Trabajo Práctico Nº 5

Transformada discreta de Fourier

1) Dada la respuesta impulsiva h_n de un SLI, con $n = 0, \ldots, N-1$, sea H_k la *transformada discreta de Fourier* (TDF) y h_n su *transformada discreta de Fourier inversa* (TDFI):

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

$$h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k \, e^{+i\frac{2\pi}{N}k\,n}, \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Demuestre que si **la respuesta impulsiva h_n es real**, entonces:

a) $H_{-k} = H_k^*$ (*propiedad hermítica*).

b) La parte real de su TDF es par y la parte imaginaria es impar.

c) El *espectro de amplitud* $|H_k|$ es par y el *espectro de fase* $\arg(H_k)$ es impar.

d) Si además h_n es par con $N = 2M+1$ elementos, $n = -M, \ldots, M$, entonces la TDF es real y par y se puede escribir como:

$$H_k = h_0 + 2\sum_{n=1}^{M} h_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right).$$

e) Si ahora H_k, $k = -M, \ldots, M$ es real y par, con $N = 2M+1$ elementos, entonces:

$$h_n = \frac{1}{N}\left[H_0 + 2\sum_{k=1}^{M} H_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right)\right]$$

2) La suma de los cuadrados de las amplitudes de una señal es conocida como la *energía* de la señal. Pruebe mediante un código en `Julia` que la secuencia $a = (\underline{1}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ cumple con el *Teorema de Parseval*, que establece que la TDF conserva la energía de la respuesta impulsiva salvo por un factor N (número de muestras).

3) Sea el operador de promedio móvil dado por la secuencia $a_n = (\frac{1}{4}, \underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4})$. Calcule su transformada Z y luego, a partir de ella, su respuesta en frecuencia $A(\omega)$. Tome ahora tres muestras equiespaciadas de $A(\omega)$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ para obtener $A_k = A(\omega_k)$. Grafique $A(\omega)$ vs. ω y A_k vs. w_k. Grafique los valores de w_k considerados en el plano complejo. Interprete y relacione todos los gráficos entre sí. Por último, calcule la TDF de a_n por medio de un código `Julia` y verifique el resultado obtenido. ¿Cómo interpreta el vector arrojado por la línea de código: `fft([0.25 0.5 0.25])`?

4) Escriba un código que lea la ondícula `wavelet` provista en la página web de la materia mediante la función `readdlm()` del paquete `DelimitedFiles`. Calcule su TDF y grafique su espectro de amplitud y fase. Calcule la TDF inversa y compruebe que es igual a la entrada.

5) La TDF de una señal h_n de tamaño N corrida τ unidades de tiempo está relacionada con la transformada discreta de Fourier de la señal original H_k mediante:

$$TDF\,\{h_{n-\tau}\} = H_k\, e^{-i\frac{2\pi}{N}\tau k}, \quad k = 0, \ldots, N-1\,.$$

Este resultado se denomina *Teorema del corrimiento de fase*. Observe que una señal atrasada ($\tau > 0$) o adelantada ($\tau < 0$) unidades de tiempo sufre un **corrimiento de fase lineal** e igual a $\Delta\phi(w_k) = \frac{2\pi}{N}\tau k$. Notar que utilizando la transformada Z esta propiedad es equivalente a escribir $H_\tau(Z) = H(Z)Z^\tau$, donde reemplazamos $Z = e^{-i\omega}$ y luego discretizamos $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$.

Dada la secuencia de 4 muestras $h_n = [-1\,, \underline{2}\,, 0\,, 3]$, calcule su TDF, aplique un corrimiento de fase lineal con $\tau = 1$ y obtenga su TDF inversa. Verifique que la secuencia obtenida es una versión **atrasada** en τ unidades de tiempo de la original. Controle el resultado utilizando el código en `Julia` provisto en la página de la materia.

►6) Sea la secuencia

$$h_n = (\underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Este tipo de secuencias se denominan de *fase lineal*, debido a que pueden interpretarse como una secuencia de fase cero (par) retardada ciertas unidades de tiempo (4, en este ejemplo). Interprete el código `Julia` provisto en la página de la materia en el que se encuentra la secuencia de fase cero utilizando el teorema de corrimiento de fase y luego, a partir de ella, se encuentra la secuencia adelantada en una unidad de tiempo respecto de la de fase cero.

7) Considere la señal $s(x)$ en el **dominio del espacio**. Para señales espaciales, se define el *número de onda angular* o *frecuencia espacial angular* K como la equivalente espacial a la frecuencia angular Ω. La magnitud equivalente al período T es la longitud de onda λ. Por lo tanto, así como en el tiempo $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, en el dominio del espacio x resulta: $K = \frac{2\pi}{\lambda}$. Análogamente al caso de señales temporales, se define un *número de onda angular digital* (adimensional) como $\nu = K\,\Delta x$, siendo Δx el intervalo de muestreo.

Sea una señal espacial $s(x) = cos(Kx)$ con longitud de onda de $\lambda = 100$ m. Tome muestras equiespaciadas de $s(x)$ en un intervalo espacial de 500 m. Digitalice generosamente a la señal utilizando un Δx bien por debajo del criterio de Nyquist. Recuerde que los números de onda angular digital deben ser menores en módulo al valor de Nyquist, π. Obtenga la derivada primera respecto de x de $s(x)$ por medio de la TDF. Compare el resultado obtenido con la derivada analítica de la señal original. Repita ahora para un intervalo espacial de 450 m.

Ayuda: Consulte el apunte "Frecuencia espacial de muestreo y teorema del muestreo en el espacio" en la página web de la materia.

Convolución circular y correlación cruzada

8) El *teorema de la convolución* afirma que la operación de convolución en el dominio del tiempo es análoga al producto de las transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia. Para las señales discretas, debido a su periodicidad, se debe distinguir entre **convolución lineal** y **convolución circular**. Sean:

$$a_n = (\underline{1}, -3, 5, -9), \quad b_n = (\underline{-7}, -1, 3, 8).$$

a) Calcule la **convolución lineal** $a * b$ entre las dos secuencias. Mediante un código en `Julia`, agregue ceros en ambas secuencias antes de transformar para que luego las TDF sean de tamaño 7. Esta técnica de agregado de ceros al final de la ondícula se denomina *zero padding*. Luego, transforme a_n y b_n al dominio de las frecuencias mediante la TDF, multiplique muestra a muestra, antitransforme, y compruebe que recupera el resultado de la convolución lineal en tiempo.

b) Calcule la **convolución circular** $a \circledast b$ entre las dos secuencias. Mediante un código en `Julia`, transforme a_n y b_n al dominio de las frecuencias mediante la TDF, multiplique muestra a muestra, antitransforme, y compruebe que recupera el resultado de la convolución circular en tiempo.

9) Dadas dos señales discretas a_t y b_t, se define la **correlación cruzada** entre a y b como:

$$\phi_{ab}(\tau) = a^*_{-\tau} * b_\tau = \sum_n a^*_{n-\tau}\, b_n = \sum_n a^*_n\, b_{n+\tau}.$$

Observación: Notar que la correlación cruzada no es más que una convolución *no conmutativa* donde la primera secuencia es rebatida y conjugada. Si las secuencias son reales, basta entonces con rebatir la primera secuencia y convolucionar. Sean las secuencias $a = (\underline{2}, -3, 6, -8)$ y $b = (\underline{-9}, -2, 1, 7)$. Calcule:

a) La correlación cruzada entre a y b y entre b y a.

b) La correlación cruzada circular entre a y b y entre b y a.

c) Constate que en ambos casos se cumple que: $\phi_{ba}(\tau) = \{\phi_{ab}(-\tau)\}^*$.

▶10) La **autocorrelación** está dada por la correlación cruzada de una secuencia consigo misma. Sea $a_t = (\underline{2}, -3, 6, -8)$, y sean A_k las muestras de su TDF en frecuencia. Mediante un código `Julia`:

a) Calcule su autocorrelación $\phi_{aa}(\tau)$ en tiempo.

b) Calcule la TDF de la autocorrelación, $TDF\{\phi_{aa}(\tau)\}_k$.

c) Haga *zero padding*, calcule el espectro de amplitud $|A_k|$ de a_t **de tamaño 7**, y compruebe que la TDF de la autocorrelación es igual al *espectro de potencia* $|A_k|^2$.