Trabajo Práctico N°4

Cuplas y filtros elementales

1) El más simple de los filtros digitales es la *cupla* o *dipolo* cuya transformada Z está dada por $H(Z) = Z - Z_0$. Este dipolo representa un filtro con un único cero en Z_0. Dado Z_0, la evaluación de esta transformada Z sobre el círculo unidad, $H(\omega)$, se puede interpretar geométricamente como la diferencia entre los vectores Z y el vector Z_0 cuando el extremo del vector Z se mueve en el plano complejo sobre $|Z| = 1$. Realice la interpretación geométrica recorriendo el círculo con la parametrización $Z = e^{-i\omega}$ y analice qué sucede con la fase y con la amplitud de $H(Z)$ para los casos:

a) $Z_0 = -2$,

b) $Z_0 = -\frac{1}{2}$.

Grafique los espectros de amplitud y fase para ambos casos y compruebe que los gráficos coinciden con el interpretación geométrica realizada. Explique además brevemente por qué en un caso se habla de fase mínima y en el otro de fase máxima. Puede utilizar el código `dipolos.m` para corroborar los gráficos.

2) Utilice el código `one-zero.m` para graficar el espectro de amplitud y el espectro de fase de distintas cuplas elementales con un único cero. Para ello, considere distintos ceros para el dipolo variando su módulo ρ y su fase ω_o.

3) Las siguientes cuplas tienen exactamente los mismos espectros de amplitud, y además la fase de una de ellas es mínima y la de la otra es máxima:

$$H_1(Z) = a + b\,Z,$$
$$H_2(Z) = b^* + a^* Z.$$

a) Para ejemplificar, considere $a = 2$ y $b = 1$ y grafique los espectros de amplitud y fase de ambas cuplas.

b) Demuestre que si $H_1(Z) = Z - Z_0$ entonces $H_2(Z) = -Z_0^*\,(Z - 1/Z_0^*)$. Observe que el cero original Z_0 fue llevado a $1/Z_0^*$.

c) Si $|Z_0| < 1$, ¿qué condición cumple $|1/Z_0^*|$? Repita para $|Z_0| > 1$. Grafique Z_0 y $1/Z_0^*$ en el plano complejo para un Z_0 genérico en las dos desigualdades consideradas.

Nota: Este par de cuplas con el mismo espectro de amplitud pero distinto espectro de fase, y cuyos ceros son recíprocos conjugados, se conocen como *dipolos equivalentes*. Compruebe los gráficos con el código `dipolos-eqv.m`.

4) Se denominan filtros *pasa todo* a aquellos filtros que pueden introducir un corrimiento de la fase y que tienen un espectro de amplitud constante e igual a uno. Este tipo de filtro se puede lograr con un único cero Z_0 y un único polo Z_p e igualando el cero a la inversa del complejo conjugado del polo:

$$H(Z) = -Z_p \, \frac{Z - 1/Z_p^*}{Z - Z_p}$$

a) Demuestre que el espectro de potencia de $H(Z)$ satisface: $|H(Z)|^2 = H(Z)[H(Z)]^* = 1$. Considere a Z en el círculo unidad, luego $Z^* = 1/Z$.

b) ¿Qué sucederá al aplicar este filtro a una señal discreta de la cual Z_p es un cero?

c) ¿Cómo se relaciona este filtro con el Ejercicio 3?

✓**5)** Un filtro con un único polo no es más que la inversa de un filtro con un único cero. Su función de transferencia esta dada por $H(Z) = \frac{1}{Z - Z_p}$. Llamaremos *espectro de potencia* al cuadrado del espectro de amplitud de la respuesta en frecuencia $|H(\omega)|$. La transformada Z del espectro de potencia de un filtro con un único polo estará luego dada por:

$$|H(Z)|^2 = \frac{1}{(Z - Z_p)(Z^* - Z_p{}^*)}$$

Utilizando coordenadas polares: $Z = e^{-i\omega}$ y $Z_p = \rho e^{i\phi} = \rho e^{-i\omega_p}$, demuestre que el espectro de potencia es igual a:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\omega - \omega_p)}$$

Escriba un código `GNU-OCTAVE` para graficar el espectro de potencia $|H(\omega)|^2$ para distintos valores de ρ cercanos al círculo unidad y $\omega_p = \frac{\pi}{4}$. ¿Para qué se puede utilizar este filtro?

6) El más simple de los filtros ARMA es aquel que posee un único cero Z_0 y un único polo Z_p; es decir un filtro ARMA de orden $(1, 1)$:

$$H(Z) = \frac{Z - Z_0}{Z - Z_p}.$$

Los gráficos de la Figura 1 corresponden a ocho filtros de este tipo. En todos ellos, el polo (✚) se encuentra en una posición fija fuera del círculo unitario $Z_p = \rho_p e^{-i\pi/4}$ (con $\rho_p = 1{,}2$), mientras que el cero (•) está sobre la misma línea radial pero a diferentes distancias dentro, sobre y fuera del círculo unitario $Z_0 = \rho_0 e^{-i\pi/4}$. (Los casos con el polo dentro del círculo unidad no son considerados ya que representan filtros causales inestables). El espectro de amplitud (línea continua) y el espectro de fase (línea punteada) han sido graficados en el intervalo $-\pi$ a π. Todos los espectros tienen la misma escala vertical. Puede generar los diferentes casos utilizando código `arma.m`.

Vincule los ocho gráficos con la descripción que corresponda:

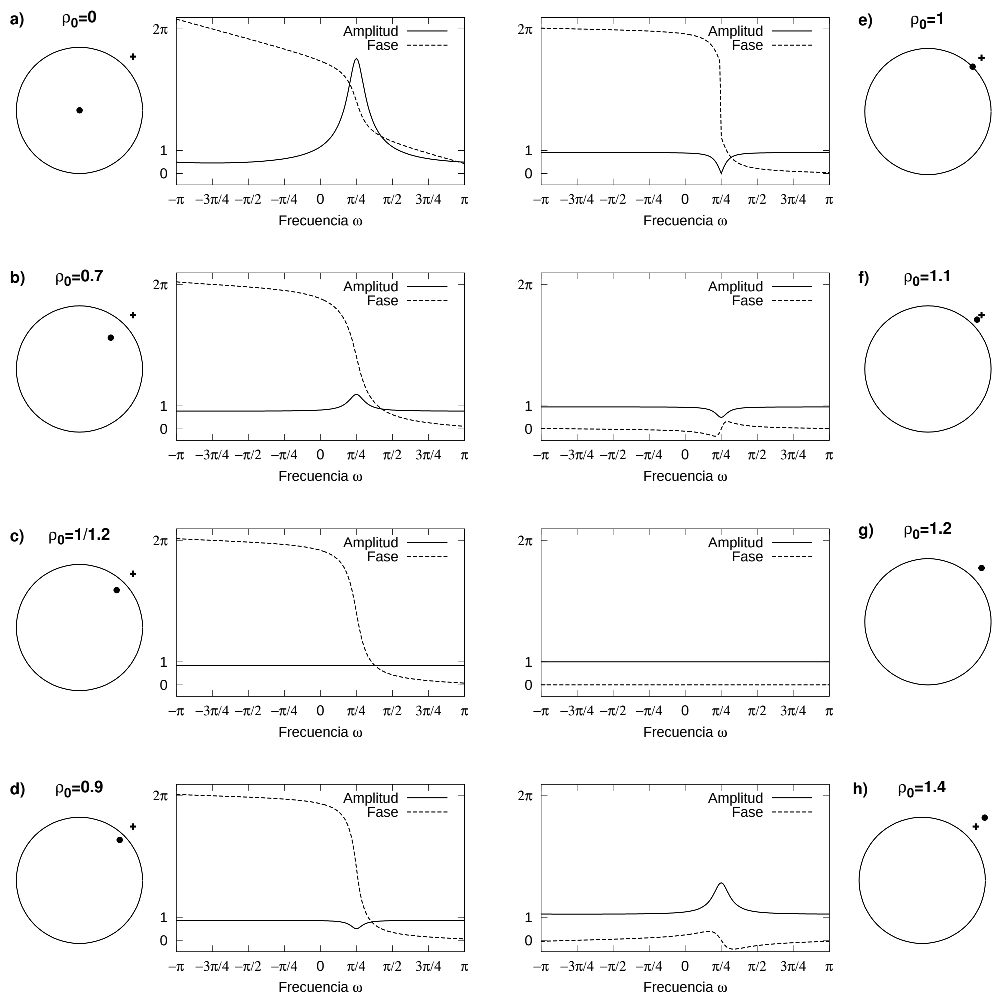

Figura 1: Espectros de amplitud y de fase para filtros con un solo cero (●) y un solo polo (✚).

- ☐ El cero está ubicado en la posición de *pasa todo* (con cambio de fase).
- ☐ El cero y el polo se cancelan exactamente y producen un filtro *pasa todo* sin cambio de fase ($H(Z) = 1$).
- ☐ El numerador es de *retardo puro*, y el filtro es similar a un filtro con un solo polo.
- ☐ El cero se ubica por afuera del polo produciendo lo que se denomina un *filtro de un polo sobre un pedestal*, que está dominado por el polo.
- ☐ El cero está ubicado sobre el círculo unidad y produce un fuerte *filtro ranura* (*notch filter*).
- ☐ El cero es parcialmente cancelado por el polo produciendo un débil *filtro ranura* similar al caso con el cero dentro del círculo unidad.
- ☐ El efecto del cero domina al del polo y produce un *filtro ranura*.
- ☐ El cero cancela parcialmente al polo, no obstante el efecto del polo domina en el filtro.

Preguntas claves

I) ¿Por qué se denomina de fase mínima a un filtro que tiene sus ceros fuera del círculo unidad y por qué de fase máxima a uno que los tiene dentro?

II) ¿Qué es un filtro *pasa todo*? ¿Tiene alguna utilidad práctica?

III) ¿Qué sucederá con una secuencia si la revertimos y tomamos los complejos conjugados de los valores de sus muestras?

IV) ¿Cuál es el espectro de fase de un impulso unitario retardado k muestras?

V) ¿Por qué a las ondículas de fase mínima se las conoce como *retardo mínimo*?