

Trabajo Práctico N° 4

Cuplas y filtros elementales

1) El más simple de los filtros digitales es la *cupla* o *dipolo* cuya transformada Z está dada por $H(Z) = Z - Z_0$. Este dipolo representa un filtro con un único cero en Z_0 . Realice la interpretación geométrica de los espectros de amplitud y fase de $Z - Z_0$ recorriendo el círculo unidad $|Z| = 1$ con la parametrización $Z = e^{-i\omega}$ para los casos:

a) $Z_0 = -2$,

b) $Z_0 = -\frac{1}{2}$.

Utilice el código `dipolos.jl` en lenguaje Julia para corroborar los gráficos de espectros de amplitud y fase en ambos casos se corresponden con la interpretación geométrica. ¿Por qué en un caso se habla de fase mínima y en el otro de fase máxima?

2) Utilice el código para filtros con un solo cero llamado `one_zero.jl` para graficar el espectro de amplitud y el espectro de fase de distintas cuplas elementales con un único cero. Para ello, considere distintos ceros para el dipolo variando su módulo ρ y su fase ω_0 .

3) Las siguientes cuplas tienen exactamente los mismos espectros de amplitud, y además la fase de una de ellas es mínima y la de la otra es máxima:

$$H_1(Z) = a + bZ,$$

$$H_2(Z) = b^* + a^*Z.$$

a) Para ejemplificar, considere $a = 2$ y $b = 1$ calcule y grafique los espectros de amplitud y fase de ambas cuplas.

b) Demuestre que si $H_1(Z) = Z - Z_0$ entonces $H_2(Z) = -Z_0^*(Z - 1/Z_0^*)$. Observe que el cero original Z_0 fue llevado a $1/Z_0^*$. Si H_1 es de fase mínima, ¿cuál será la fase de H_2 ? Justifique.

c) Si $|Z_0| < 1$, ¿qué condición cumple $|1/Z_0^*|$? Repita para $|Z_0| > 1$. Grafique Z_0 y $1/Z_0^*$ en el plano complejo para un Z_0 genérico en las dos desigualdades consideradas.

Nota: Este par de cuplas con el mismo espectro de amplitud pero distinto espectro de fase, y cuyos ceros son recíprocos conjugados, se conocen como *dipolos equivalentes*. Compruebe los gráficos con el código `dipolos_eqv.jl`.

- 4) Un filtro con un único polo no es más que la inversa de un filtro con un único cero. Su función de transferencia esta dada por $H(Z) = \frac{1}{Z-Z_p}$. Llamaremos *espectro de potencia* al cuadrado del espectro de amplitud de la respuesta en frecuencia $|H(\omega)|$. La transformada Z del espectro de potencia de un filtro con un único polo estará luego dada por:

$$|H(Z)|^2 = \frac{1}{(Z - Z_p)(Z^* - Z_p^*)}$$

- a) Utilizando coordenadas polares: $Z = e^{-i\omega}$ y $Z_p = \rho e^{i\phi} = \rho e^{-i\omega_p}$, demuestre que el espectro de potencia es igual a:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega - \omega_p)}$$

- b) Escriba un código **Julia** para graficar el espectro de potencia $|H(\omega)|^2$ para distintos valores de ρ cercanos al círculo unidad y $\omega_p = \frac{\pi}{4}$. ¿Para qué se puede utilizar este filtro?
- c) Si $\rho = 1 + \epsilon$, demuestre que $|H(\omega_p)| = \frac{1}{\epsilon}$.
- d) Dada un señal muestreada a $\Delta t = 4$ ms, defina un filtro elemental con función de transferencia real a partir de concatenar un filtro con un único polo y su filtro conjugado “en cascada” para aislar una señal de $f_0 = 50$ Hz eligiendo ρ_p de forma tal que $H(f_0) = 100$.
- 5) Se denominan filtros *pasa todo* a aquellos filtros que pueden introducir un corrimiento de la fase y que tienen un espectro de amplitud constante e igual a uno. Este tipo de filtro se puede lograr con un único cero Z_0 y un único polo Z_p e igualando el cero a la inversa del complejo conjugado del polo; $Z_0 = 1/Z_p^*$:

$$H(Z) = \frac{1 - Z_p^* Z}{Z - Z_p} = -Z_p^* \frac{Z - 1/Z_p^*}{Z - Z_p}$$

- a) Observe que si consideramos las cuplas equivalentes $H_1(Z)$ y $H_2(Z)$ definidas según el inciso **b)** del ejercicio **3)** con $Z_0 = Z_p$, entonces $H(Z) = H_2(Z)/H_1(Z)$.
- b) Demuestre que el espectro de potencia de $H(Z)$ satisface:

$$|H(Z)|^2 = H(Z)[H(Z)]^* = 1.$$

Ayuda: Considere a Z en el círculo unidad y que por lo tanto $Z^* = 1/Z$.

- c) ¿Qué sucederá al aplicar este filtro a una señal discreta de la cual Z_p es un cero?
- d) Defina dos filtros elementales pasatodo para transformar a la ondícula $(\underline{1}, 0, 4)$ en su equivalente de fase mínima. ¿Qué ondícula equivalente obtiene?

- 6) El más simple de los filtros ARMA es aquel que posee un único cero Z_0 y un único polo Z_p ; es decir un filtro ARMA de orden (1, 1):

$$H(Z) = k \frac{Z - Z_0}{Z - Z_p}, \quad k = \text{cte.}$$

Los gráficos de la Figura 1 corresponden a ocho filtros de este tipo. En todos ellos, el polo (\blackstar) se encuentra en una posición fija fuera del círculo unitario $Z_p = \rho_p e^{-i\pi/4}$ (con $\rho_p = 1, 2$), mientras que el cero (\bullet) está sobre la misma línea radial pero a diferentes distancias dentro, sobre y fuera del círculo unitario $Z_0 = \rho_0 e^{-i\pi/4}$. (Los casos con el polo dentro del círculo unidad no son considerados ya que representan filtros causales inestables). El espectro de amplitud (línea continua) y el espectro de fase (línea punteada) han sido graficados en el intervalo $-\pi$ a π . Todos los espectros tienen la misma escala vertical. Puede generar los diferentes casos utilizando código `arma.jl`.

Vincule los ocho gráficos con la descripción que corresponda:

- El cero está ubicado en la posición de *pasa todo* (con cambio de fase).
- El cero y el polo se cancelan exactamente y producen un filtro *pasa todo* sin cambio de fase ($H(Z) = 1$).
- El numerador es de *retardo puro*, y el filtro es similar a un filtro con un solo polo.
- El cero se ubica por afuera del polo produciendo lo que se denomina un *filtro de un polo sobre un pedestal*, que está dominado por el polo.
- El cero está ubicado sobre el círculo unidad y produce un fuerte *filtro ranura (notch filter)*.
- El cero es parcialmente cancelado por el polo produciendo un débil *filtro ranura* similar al caso con el cero dentro del círculo unidad.
- El efecto del cero domina al del polo y produce un *filtro ranura*.
- El cero cancela parcialmente al polo, no obstante el efecto del polo domina en el filtro.

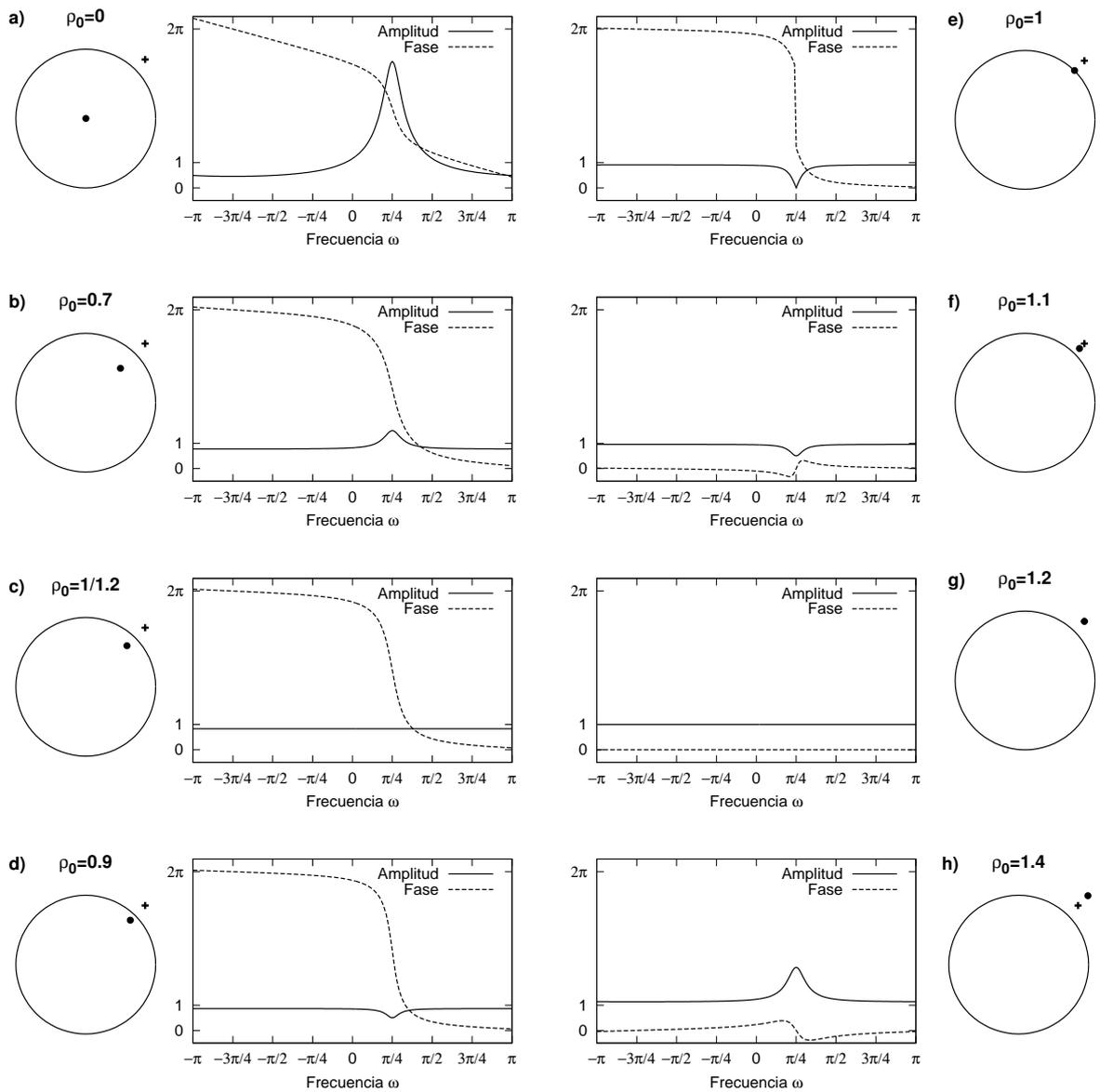


Figura 1: Espectros de amplitud y de fase para filtros con un solo cero (•) y un solo polo (+).