# Trabajo Práctico Nº 3

## Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes

**1)** Sea $h_n$ la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante (SLI). Se define la *respuesta en frecuencia del sistema* $H(\omega)$ como:

$$H(\omega) = \sum_n h_n \, e^{-i\omega n} \, .$$

Observar que la respuesta en frecuencia es una función compleja en el dominio de la frecuencia, continua en $\omega$, y está completamente determinada por la respuesta impulsiva $h_n$. El módulo de $H(\omega)$ se denomina *espectro de amplitud* y la fase *espectro de fase*. Demuestre las siguientes propiedades de $H(\omega)$:

- Si $H(Z)$ es la transformada Z de $h_n$, entonces $H(\omega) = H(Z)|_{Z=e^{-i\,\omega}}$.
- $H(\omega)$ es periódica y su período es $2\pi$.
- *Propiedad hermítica*: Si la respuesta impulsiva $h_n$ es real, entonces $H(-\omega) = H^*(\omega)$.
- Si la respuesta impulsiva $h_n$ es real, entonces el espectro de amplitud es par.

**2)** Sea $h_n$ la respuesta impulsiva de un SLI de longitud impar $N = 2M + 1$. Demuestre que:

**a)** Si $h_n$ es par, entonces:

$$H(\omega) = h_0 + 2 \sum_{k=1}^{M} h_k \cos(\omega k).$$

*Observación*: Si además la respuesta impulsiva es real, entonces $H(\omega)$ es real.

**b)** Si $h_n$ es impar, entonces:

$$H(\omega) = -2\, i \sum_{k=1}^{M} h_k \sin(\omega k).$$

*Observación*: Si además la respuesta impulsiva es real, entonces $H(\omega)$ es compleja.

**3)** Para suavizar una de serie de datos se puede utilizar un operador de promedio simple de tres puntos: $y_n = \frac{1}{3}\,(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$. Calcule la respuesta en frecuencia del sistema y grafíquela. Calcule y grafique también el espectro de amplitud y el espectro de fase. ¿Es el operador apropiado para suavizar los datos? ¿Qué desventajas presenta? Utilice el código `Julia` provisto en la página de la materia para controlar los resultados.

**4)** Calcule y grafique la respuesta en frecuencia, el espectro de amplitud y de fase para el operador de *promedio pesado* dado por: $y_n = \frac{1}{4}\,(x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1})$. ¿Es este un operador más apropiado para suavizar los datos que promedio simple dado en el ejercicio 3?

**5)** Para señales continuas, la derivada en el dominio de la frecuencia está dada por $F'(\omega) = i\,\omega\,F(\omega)$. Es decir, el operador diferenciador exacto está dado por $H(\omega) = i\,\omega$ y para señales discretas debe ser aproximado utilizando las muestras disponibles. Es posible realizar dicha aproximación por diferencias hacia adelante: $y_n = x_{n+1} - x_n$, o hacia atrás: $y_n = x_n - x_{n-1}$. Calcule la respuesta en frecuencia del operador que aplica la diferencia de primer orden hacia adelante. Realice un desarrollo en serie de Taylor y compárela con la respuesta en frecuencia del diferenciador exacto. Grafique ambos espectros de amplitud y de fase (utilice el código en `Julia` provisto en la página de la materia). ¿Para qué frecuencias la diferencia de primer orden es una buena aproximación de la derivada? ¿Coincide el espectro de fase con el del diferenciador exacto?

**6)** Obtenga la respuesta en frecuencia del operador que realiza la diferencia central de primer orden: $y_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n-1})$. Compare con la respuesta en frecuencia del diferenciador exacto a partir de realizar un desarrollo en serie de Taylor. Grafique ambos espectros de amplitud. ¿Coincide el espectro de fase con el del diferenciador exacto?

**►7)** Al aproximar derivadas por diferencias de primer orden hacia adelante o hacia atrás estamos asignando la diferencia a la muestra $n$ cuando en realidad deberíamos asignarla a la muestra $n + \frac{1}{2}$ o $n - \frac{1}{2}$, respectivamente, lo cual no es posible. Los errores generados por el corrimiento se propagan y acumulan generando problemas de estabilidad en la solución. Una alternativa para solucionar este problema, y que además conserva la condición de fase mínima de la entrada, es utilizar la denominada *transformación bilineal*:

$$y_{n-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

**a)** Pruebe que la función de transferencia del operador bilineal está dada por:

$$H(Z) = 2\,\frac{1-Z}{1+Z}.$$

**b)** ¿Cómo se compara esta transformación bilineal con la transformada $Z$ de la aproximación trapezoidal de la integración calculada en la práctica anterior?

**c)** Divida el numerador y el denominador de la transformación bilineal por $\sqrt{Z}$ , sustituya $Z = e^{-i\omega}$, y demuestre la validez de la siguiente aproximación para las bajas frecuencias:

$$2\,\frac{1-Z}{1+Z} = 2\,i\,\tan(\frac{\omega}{2}) \simeq i\omega.$$

**d)** Compare el espectro de amplitud y el espectro de fase de la transformación bilineal con los espectros correspondientes al diferenciador exacto.