Trabajo Práctico N°3

Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes

1) Sea h_n la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante (SLI). Se define *respuesta en frecuencia del sistema* $H(\omega)$ como:

$$H(\omega) = \sum_k h_k \, e^{-i\omega k} \, .$$

Observar que la respuesta en frecuencia es una función compleja en el dominio de la frecuencia, continua en ω, y está completamente determinada por la respuesta impulsiva h_n. El módulo de $H(\omega)$ se denomina *espectro de amplitud* y la fase *espectro de fase*. Demuestre las siguientes propiedades de $H(\omega)$:

- Si $H(Z)$ es la transformada Z de h_n, entonces $H(\omega) = H(Z)|_{Z=e^{-i\,\omega}}$.
- $H(\omega)$ es periódica y su período es 2π.
- *Propiedad hermítica*: Si la respuesta impulsiva h_n es real, entonces $H(-\omega) = H^*(\omega)$.
- Si la respuesta impulsiva h_n es real, entonces el espectro de amplitud es par.

2) Sea un h_n la respuesta impulsiva de un SLI de longitud impar $N = 2M + 1$. Demuestre que:

a) Si h_n es par, entonces:

$$H(\omega) = h_0 + 2\sum_{k=1}^{M} h_k \cos(\omega k).$$

Observación: Si además la respuesta impulsiva es real, entonces $H(\omega)$ es real.

b) Si h_n es impar, entonces:

$$H(\omega) = -2\, i \sum_{k=1}^{M} h_k \sin(\omega k).$$

Observación: Si además la respuesta impulsiva es real, entonces $H(\omega)$ es compleja.

3) Para suavizar una de serie de datos se puede utilizar un operador de promedio simple de tres puntos: $y_n = \frac{1}{3}\,(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$. Calcule la respuesta en frecuencia del sistema y grafíquela. Calcule y grafique también el espectro de amplitud y el espectro de fase. ¿Es el operador apropiado para suavizar los datos? ¿Qué desventajas presenta? Utilice el código `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia para controlar los resultados.

4) Calcule y grafique la respuesta en frecuencia, el espectro de amplitud y de fase para el operador de *promedio pesado* dado por: $y_n = \frac{1}{4}\,(x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1})$. ¿Es este un operador más apropiado para suavizar los datos que promedio simple dado en el ejercicio 3?

5) Grafique un período la respuesta en frecuencia del filtro del ejercicio 4 en función de la frecuencia angular Ω para $\Delta t = \frac{1}{2}, 1$ y 2. ¿En qué se diferencias los tres gráficos? ¿Cómo se verían estos gráficos si estuviesen en función de la frecuencia angular digital ω?

6) Para señales continuas, la derivada en el dominio de la frecuencia está dada por $F'(\omega) = i\,\omega\,F(\omega)$. Es decir, el operador diferenciador exacto está dado por $H(\omega) = i\,\omega$ y para señales discretas debe ser aproximado utilizando las muestras disponibles. Es posible realizar dicha aproximación por diferencias hacia adelante: $y_n = x_{n+1} - x_n$, o hacia atrás: $y_n = x_n - x_{n-1}$. Calcule la respuesta en frecuencia del operador que aplica la diferencia de primer orden hacia adelante. Realice un desarrollo en serie de Taylor y compárela con la respuesta en frecuencia del diferenciador exacto. Grafique ambos espectros de amplitud y de fase (utilice el código en `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia). ¿Para qué frecuencias la diferencia de primer orden es una buena aproximación de la derivada? ¿Coincide el espectro de fase con el del diferenciador exacto?

7) Obtenga la respuesta en frecuencia del operador que realiza la diferencia central de primer orden: $y_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n-1})$. Compare con la respuesta en frecuencia del diferenciador exacto a partir de realizar un desarrollo en serie de Taylor. Grafique ambos espectros de amplitud. ¿Coincide el espectro de fase con el del diferenciador exacto?

8) Al aproximar derivadas por diferencias de primer orden hacia adelante o hacia atrás estamos asignando la diferencia a la muestra n cuando en realidad deberíamos asignarla a la muestra $n + \frac{1}{2}$ o $n - \frac{1}{2}$, respectivamente, lo cual no es posible. Los errores generados por el corrimiento se propagan y acumulan generando problemas de estabilidad en la solución. Una alternativa para solucionar este problema, y que además conserva la condición de fase mínima de la entrada, es utilizar la denominada *transformación bilineal*:

$$y_{n-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

a) Pruebe que la función de transferencia de del operador bilineal está dada por:

$$H(Z) = 2\,\frac{1-Z}{1+Z}.$$

b) ¿Cómo se compara esta transformación bilineal con la transformada Z de la aproximación trapezoidal de la integración calculada en la práctica anterior?

c) Divida el numerador y el denominador de la transformación bilineal por $\sqrt{Z}$, sustituya $Z = e^{-i\omega}$, y demuestre la validez de la siguiente aproximación para las bajas frecuencias:

$$2\,\frac{1-Z}{1+Z} = 2\,i\,\tan(\frac{\omega}{2}) \simeq i\omega.$$

d) Compare el espectro de amplitud y el espectro de fase de la transformación bilineal con los espectros correspondientes al diferenciador exacto.

9) Grafique el espectro de amplitud en decibeles de la respuesta en frecuencia de la diferencia de primer orden hacia adelante, de la diferencia central, y de la transformada bilineal, en todos los casos normalizados por la respuesta en frecuencia del diferenciador ideal $i\,\omega$. Controle los gráficos mediante el código en `GNU-OCTAVE` provisto en la página de la materia. Calcule además los espectro de fase. ¿Cuál o cuáles de estos operadores producen el mismo cambio de fase que el diferenciador exacto?

✓**10)** Mediante un código en `GNU-OCTAVE`, genere una señal cajón de $N = 100$ muestras dada por $s_n = 1$ si $N/3 < n < 2N/3$, y $s_n = 0$ caso contrario. Agregue ruido aleatorio aditivo de amplitud máxima 0.2 para contaminar la señal. Suavice ahora el dato contaminado mediante los operadores de promedio simple del ejercicio 3 y de promedio pesado del ejercicio 4. Grafique los resultados y coméntelos brevemente dentro del código.
Nota: la señal suavizada debe tener la misma cantidad de muestras que la señal de entrada.

Preguntas claves

I) ¿Qué diferencia hay entre respuesta en frecuencia y espectro de amplitud?

II) ¿Qué diferencia existe entre graficar la respuesta en frecuencia (o el espectro de amplitud y el de fase) en función de la frecuencia angular digital y graficar en función de la frecuencia angular?

III) Para respuestas impulsivas reales, el espectro de amplitud es par y de período 2π. ¿En qué intervalo alcanza conocer el espectro de amplitud para describirlo completamente en estos casos?

IV) La respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal es $i\omega$. ¿Cuáles son las consecuencias en el dominio del tiempo de multiplicar la transformada de Fourier de una función por i y por ω?