

Trabajo Práctico N°2

Transformada Z

- 1) Escriba la transformada Z de las siguientes secuencias causales, encuentre sus ceros; expresaselas como productos de cuplas o dipolos y decida si son de *fase mínima*, *máxima*, o *mixta*. Verifique los resultados con el comando `roots` de GNU-OCTAVE, ingresando los coeficientes del polinomio para potencias en orden decreciente.

a) $(\underline{2}, -2, 1)$	d) $(\underline{16}, 0, -8, 0, 1)$
b) $(\underline{2}, -3, -2)$	e) $(\underline{1}, 0, 0)$
c) $(\underline{1}, -2, 4)$	f) $(\underline{1}, 0, -1)$

- 2) Sea el dipolo $(\underline{1}, -a)$ cuya transformada Z es $A(Z) = 1 - aZ$. Considere los casos: $a = \frac{1}{2}$ y $a = 2$. Para cada uno de los dos casos:
 - a) Calcule la fase del dipolo.
 - b) Obtenga la inversa aproximada de tamaño 4 en el dominio Z expandiendo la serie geométrica (considere $|Z| = 1$) de forma que sea estable (la serie debe converger).
 - c) Antitransforme para volver al tiempo.
 - d) Analice la *causalidad* de la inversa obtenida.
 - e) ¿Se puede obtener una inversa estable y causal para el caso $a = 2$?

- 3) Clasifique la secuencia $(\underline{4}, 0, -1)$ y encuentre su inversa aproximada de tamaño 5 haciendo uso de la transformada Z .

- 4) Pruebe que si $x_t \Leftrightarrow X(Z)$ entonces $x_{t-1} \Leftrightarrow ZX(Z)$ y que $x_{t+1} \Leftrightarrow Z^{-1}X(Z)$.
Observación: multiplicar por Z representa un *retardo unitario* en el dominio del tiempo, mientras que dividir por Z implica un *adelanto unitario*.

- 5) Si $x_t \Leftrightarrow X(Z)$, y consideramos que $\Delta t = 1$, pruebe que $X(Z)(1 - Z)$ representa la transformada Z de x'_t aproximada por “diferencias hacia atrás”. A partir de ello, pruebe que $X(Z)/(1 - Z)$ representa una forma de aproximar la transformada Z de $\int x_t$.

- 6) Dada una secuencia a_n de longitud $n + 1$ cuya transformada Z es $A(Z)$,
 - a) demuestre que la transformada Z de la secuencia a_n revertida es $Z^n A(\frac{1}{Z})$.
 - b) Sea a_t una secuencia de fase mínima de longitud $N + 1$. ¿Cuál será la fase de la secuencia revertida?

Sistemas lineales e invariantes

- 7) Un sistema lineal e invariante *no recursivo* que represente una aproximación discreta de la diferenciación mediante *diferencias centrales*, puede escribirse de la siguiente manera:

$$y_t = \frac{1}{2\Delta t} (x_{t+1} - x_{t-1}).$$

Encuentre la transformada Z de la respuesta impulsiva de este sistema. ¿Es estable? ¿Es causal?

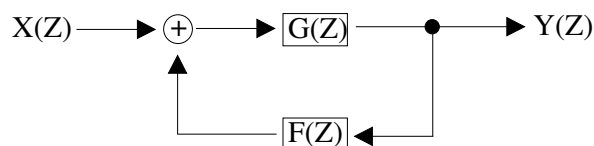
- ✓8) En la página web de la materia se provee un código en GNU-OCTAVE en el que se genera una señal cajón de tamaño N dada por: $s_n = 1$ si $N/3 < n < 2N/3$, y $s_n = 0$ caso contrario. Implementar los operadores de diferencia hacia atrás, diferencia hacia adelante, y diferencias centrales sobre esta señal. Graficar e interpretar los resultados.

- 9) Un sistema lineal e invariante *recursivo* que represente la *aproximación trapezoidal* de una integración puede escribirse como:

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\Delta t}{2} (x_t + x_{t-1}).$$

Halle la transformada Z de la respuesta impulsiva de este sistema y clasifique el sistema de acuerdo a la ubicación de sus polos y ceros en el plano Z .

- 10) Encuentre la transformada Z de la respuesta impulsiva del sistema que se muestra en la siguiente figura en función de $F(Z)$ y $G(Z)$.



- 11) Si en el problema anterior $G(Z) = 1$, ¿qué condiciones debe cumplir $F(Z)$ para que:

- el sistema sea *estable*?
- el sistema sea *causal*?
- el sistema sea de *fase mínima*?

- 12) Sea

$$H(Z) = \frac{A(Z)}{B(Z)}$$

la transformada Z de un proceso ARMA. Demuestre que salvo por una constante, $A(Z)$ representa el promedio móvil (MA) y $B(Z)$ la parte autorregresiva (AR).

Preguntas claves

- I) Dada la transformada Z de una secuencia, ¿qué interpretación se le da a Z y a $1/Z$?
- II) ¿Qué condición deben cumplir los ceros de la transformada Z de una secuencia real?
¿Cómo se ubican estos ceros en el plano complejo?
- III) ¿Qué condición debe cumplir una secuencia para que su inversa sea causal y estable?
- IV) ¿La convolución en el tiempo es equivalente a qué operación en el dominio de la transformada Z ?