Trabajo Práctico Nº 2

Transformada Z

1) Escriba la transformada Z de las siguientes secuencias causales y encuentre sus ceros. Luego, exprésela como productos de dipolos y casifique su fase como *mínima*, *máxima*, o *mixta*.

a) $(\underline{2}, -2, 1)$

b) $(\underline{2}, -3, -2)$

c) $(\underline{1}, -2, 4)$

Verifique los resultados obtenidos utilizando el código en `Julia` "`ceros.jl`" que se encuentra en la página web de la materia.

2) Sea el dipolo $h_n = (\underline{1}, -a)$ cuya transformada Z es $H(Z) = 1 - aZ$. Considere los casos: $a = \frac{1}{2}$ y $a = 2$. Para cada uno de los dos casos:

a) Calcule la fase del dipolo.

b) Obtenga la inversa aproximada de tamaño 4 en el dominio Z expandiendo la serie geométrica (considere $|Z| = 1$) de forma que sea estable (la serie debe converger).

c) Antitransforme para volver al tiempo.

d) Analice la *causalidad* de la inversa obtenida.

e) ¿Se puede obtener una inversa estable y causal para el caso $a = 2$?

3) Clasifique la secuencia $h_n = (\underline{4}, 0, -1)$ y encuentre su inversa aproximada de tamaño 5 a partir de su transformada Z. Compruebe que la aproximación de la inversa hallada es correcta.

4) Pruebe que si $x_t \Leftrightarrow X(Z)$ entonces $x_{t-1} \Leftrightarrow ZX(Z)$ y que $x_{t+1} \Leftrightarrow Z^{-1}X(Z)$.
Observación: multiplicar por Z representa un *retardo unitario* en el dominio del tiempo, mientras que dividir por Z implica un *adelanto unitario*.

5) Dada una secuencia a_n de longitud $N + 1$ cuya transformada Z es $A(Z)$:

a) Demuestre que la transformada Z de la secuencia revertida a_n^{rev} es $Z^n\, A\left(\frac{1}{Z}\right)$.

b) Si a_n es de fase mínima, ¿cuál será la fase de la secuencia revertida?

Sistemas lineales e invariantes

6) Un sistema lineal e invariante *no recursivo* que represente una aproximación discreta de la diferenciación mediante *diferencias centrales*, puede escribirse de la siguiente manera:

$$y_t = \frac{1}{2\,\Delta t}\left(x_{t+1} - x_{t-1}\right).$$

Encuentre la transformada Z de la respuesta impulsiva de este sistema. ¿Es estable? ¿Es causal?

7) En la página web de la materia se provee un código en `Julia` en el que se genera una señal cajón de tamaño N dada por: $s_n = 2$ si $N/3 < n < 2N/3$, y $s_n = 1$ caso contrario. Implementar los operadores de diferencia hacia atrás, diferencia hacia adelante, y diferencias centrales sobre esta señal completando el código. Graficar e interpretar los resultados.

8) Un sistema lineal e invariante *recursivo* que represente la *aproximación trapezoidal* de una integración puede escribirse como:

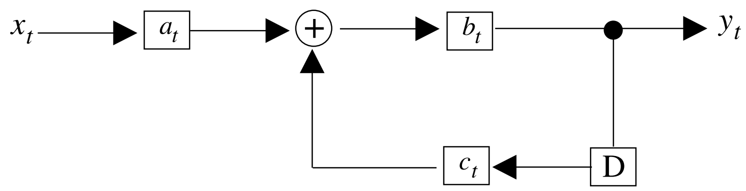
$$y_t = y_{t-1} + \frac{\Delta t}{2}\left(x_t + x_{t-1}\right).$$

a) Escriba el diagrama que representa este sistema e identifique la parte MA y la parte AR.

b) Halle la transformada Z de la respuesta impulsiva.

c) Clasifique el sistema de acuerdo a la ubicación de sus polos y ceros en el plano Z.

►**9)** Recuerde el siguiente sistema lineal e invariante de la práctica anterior:



donde:

$$\begin{cases} a_t = (\underline{-4},\, 0,\, 1) \\ b_t = (\underline{1}) \\ c_t = (\underline{-0.5}) \end{cases}$$

a) Calcule la transformada Z de la función de transferencia

b) Clasifique su estabilidad, causalidad y fase, de ser posible.

c) Haciendo uso de la transformada Z, aproxime la inversa que aparece en la respuesta impulsiva de la función de transferencia de forma tal que al volver al dominio del tiempo la función de transferencia contenga un total de 5 muestras.