Frecuencia digital, frecuencia de Nyquist y Teorema del muestreo

Apunte

Definiciones

Período	T	[s]
Frecuencia	$f = 1/T$	[Hz, ciclos/s]
Frecuencia angular	$\Omega = 2\pi f$	[rad/s]
Intervalo de muestreo	Δt	[s/muestra]
Frecuencia angular *digital*	$\omega = \Omega \Delta t$	[rad/muestra]
Frecuencia *digital*	$\mathrm{f} = f \Delta t$	[ciclos/muestra]

Cuadro 1: Variables

Banda limitada

Una señal $s(t)$ se dice de banda limitada si su transformada de Fourier cumple $|S(\Omega)| = 0$ para toda $\Omega \geqslant \Omega_m$.

Teorema del muestreo

Para muestrear satisfactoriamente una señal de *banda limitada* de frecuencia máxima f_m por medio de *muestras equiespaciadas*, la frecuencia de muestreo debe cumplir $\mathrm{f}_s > 2\,\mathrm{f}_m$.

Frecuencia de muestreo	$f_s = 1/\Delta t$
Frecuencia angular de muestreo	$\Omega_s = 2\pi/\Delta t$
Frecuencia angular *digital* de muestreo	$\omega_s = \Omega_s \Delta t \equiv 2\pi$
Frecuencia *digital* de muestreo	$\mathrm{f}_s = f_s \Delta t \equiv 1$

Cuadro 2: Frecuencia de muestreo

Frecuencia de Nyquist

Es la máxima frecuencia que es posible recuperar de una señal dado un intervalo de muestreo fijo Δt.

Frecuencia de Nyquist	$f_N = f_s/2 = \frac{1}{2\Delta t}$
Frecuencia angular de Nyquist	$\Omega_N = \pi/\Delta t$
Frecuencia angular *digital* de Nyquist	$\omega_N \equiv \pi$
Frecuencia *digital* de Nyquist	$\mathrm{f}_N \equiv \frac{1}{2}$

Cuadro 3: Frecuencia de Nyquist

Relación entre las frecuencias de la señal analógica y digital

Sea $s(t) = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi f t)$ una señal sinusoidal contínua de amplitud A y de frecuencia f, y $s_n = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_0 n\Delta t)$, con $n \in \mathbb{Z}$, la señal digital que resulta de muestrear $s(t)$ a un intervalo de muestreo Δt. Como los puntos muestreados s_n son tomados sobre la función $s(t)$, se cumple $s(t = n\Delta t) = s_n$, luego

$$A\,\mathrm{sen}\,(2\pi f n\Delta t) = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_0 n\Delta t)\,,$$

lo cual es cierto siempre que los argumentos difieran en un múltiplo entero de 2π. Entonces, sin pérdida de generalidad,

$$2\pi f\, n\Delta t = 2\pi f_0\, n\Delta t + 2\pi n k,$$

con $n, k \in \mathbb{Z}$. Es decir

$$f = f_0 + k/\Delta t.$$

Dado que $f_s = 1/\Delta t$,

$$\boxed{f = f_0 + k\, f_s,}$$

con k tal que $f_0 \leqslant f_s$.

Como f_0 no puede ser superior a la frecuencia de Nyquist $f_N = f_s/2$, si $0 \leqslant f_0 \leqslant f_N$, la frecuencia de la señal digital es directamente f_0, en caso contrario es $f_0 - f_s$, para considerar el signo que implica un cambio de fase para las funciones impares. A modo de conclusión, la frecuencia de la señal digital cumple $|f_0| \leqslant f_N$, pudiéndose además introducirse un cambio de fase en la componente impar de la señal analógica.