Repaso de transformada y serie de Fourier

Transformada de Fourier

Definición

La *transformada de Fourier (TF)* de una función $f(t)$ se define como:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} \mathrm{d}t\,,$$

de donde surge, utilizando la propiedad de la Delta de Dirac, $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t}\mathrm{d}\Omega$, que la *transformada inversa de Fourier* está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) e^{+i\Omega t}\mathrm{d}\Omega.$$

Notación

Para indicar que $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ utilizamos la siguiente notación:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\right\} = F\left(\Omega\right)\,, \quad \text{o bien} \quad f(t) \Leftrightarrow F\left(\Omega\right).$$

Porpiedad hermítica

Si $f(t)$ es real y * denota la conjugación compleja, entonces:

$$F^*(-\Omega) = F(\Omega)$$

Simetrías

- La TF de una función real par es una función real par.
- La TF de una función real impar es una función imaginaria impar.
- La TF de una función imaginaria par es una función imaginaria par.
- La TF de una función imaginaria impar es una función real impar.

Observación: Sea $f(t)$ es una función real. Podemos escribir a $f(t)$ como la suma de una función real par más una función real impar via:

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] + \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right].$$

Luego, por las propiedades anteriores, notar que la TF de $f(t)$ tiene parte real par y parte imaginaria impar.

Propiedades

Las siguientes propiedades surgen de la definición de la transformada de Fourier:

a) Simetría: $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$

b) Linealidad: $f(t) + c\, g(t) \Leftrightarrow F(\Omega) + c\, G(\Omega), \quad c \in \mathbb{C}.$

c) Escala: $f(a\,t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\Omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}.$

d) Retardo: $f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-i\Omega\tau} F(\Omega), \quad \tau \in \mathbb{R}.$

e) Modulación: $e^{i\Omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(\Omega - \Omega_0), \quad \Omega_0 \in \mathbb{R}.$

f) Derivada: $\dfrac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow i\Omega F(\Omega)$, con $f(|t|) \to 0$ cuando $|t| \to \infty$.

g) Integral: $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \Leftrightarrow \dfrac{F(\Omega)}{i\Omega}.$

h) Convolución: $f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\Omega)\, F_2(\Omega)$, donde $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$

i) Multiplicación: $f_1(t)\, f_2(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\,\pi} F_1(\Omega) * F_2(\Omega).$

j) Correlación: $f_1(t) \otimes f_2(t) \Leftrightarrow F_1^*(\Omega)\, F_2(\Omega)$, donde $f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau)\, f_2(t+\tau)\, \mathrm{d}\tau.$

k) Autocorrelación: $f(t) \otimes f(t) \Leftrightarrow F^*(\Omega)\, F(\Omega) = |F(\Omega)|^2.$

Algunos pares transformados

Sean t_0 y $\Omega_0 \in \mathbb{R}$,

a) $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

b) $\dfrac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\Omega)$ (por simetría a paritr de **a)**)

c) $\mathrm{boxcar}(t) \Leftrightarrow 2\, \mathrm{sinc}(\Omega)$

d) $\mathrm{sinc}(t) \Leftrightarrow \pi\, \mathrm{boxcar}(t)$ (por simetría a paritr de **c)**)

e) $\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-i\Omega t_o}$

f) $e^{i\Omega_o t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

g) $\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\, (\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0))$

h) $\mathrm{sen}(\Omega_0 t) \Leftrightarrow i\,\pi\, (\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0))$

Series de Fourier

Definición

Sea $f(t)$ una función periódica en tiempo con período T, o que está definida en el intervalo $[-T/2, T/2]$ y es extendida de forma periódica con período T. La transformada de Fourier de esta función es *discreta* y su transformada inversa, conocida como *serie de Fourier*, es una aproximación lineal de $f(t)$ mediante funciones exponenciales complejas:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}k\,t} \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}k\,t}\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Casos particulares

- Si $f(t)$ es una **función par**, se cumple que $c_{-k} = c_k$, y la serie de Fourier de $f(t)$ está dada por una serie de cosenos:

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(\frac{2\pi}{T}k\,t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\,\mathrm{d}t, \\ \\ c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}k\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

  Nota: Observe que c_0 representa el promedio de $f(t)$ en un período. Como la frecuencia asociada a este valor es 0, c_0 se suele denominar *componente continua* de $f(t)$.

- Si $f(t)$ es una **función impar**, se cumple que $c_{-k} = -c_k$, y la serie de Fourier de $f(t)$ está dada por una serie de senos (sin componente continua):

$$f(t) = 2\,i\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(\frac{2\pi}{T}k\,t) \quad \Leftrightarrow \quad c_k = -\frac{i}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}k\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$