El efecto de borde en el filtrado en el dominio del tiempo

Apunte

El efecto de borde

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo. Sea la señal $s = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ de 9 muestras que queremos procesar con el filtro $h = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \underline{\frac{1}{5}}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ de fase cero y tamaño 5 por medio de la convolución lineal $s * h$. Este filtro claramente debiese arrojar como salida de la convolución el promedio simple de las muestras de s. Como la señal es de tamaño 9 y el filtro de tamaño 5, la salida tendrá 13 muestras. Al calcular la convolución obtenemos:

$$\hat{s_f} = s * h = (\overbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}}^{\text{X}}, \underline{\frac{3}{5}}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \overbrace{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}}^{\text{X}}). \tag{1}$$

Lo primero que debe notarse es que la muestra a tiempo cero de la salida es la tercera. Las primeras dos muestras y las últimas dos muestras de la señal filtrada $\hat{s_f}$ (marcadas con una "X") fueron generadas por la convolución y corresponden a valores temporales que no existían en la señal original s. Por lo tanto, estas muestras **deben ser truncadas**. Luego, la señal filtrada queda con la misma cantidad de muestras que la original:

$$s_f = s * h = (\overbrace{\underline{\frac{3}{5}}, \frac{4}{5}}^{\text{borde}}, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{\text{sin borde}}, \overbrace{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}}^{\text{borde}}). \tag{2}$$

No obstante, este no es el único *efecto de borde* que genera la convolución lineal. Notemos que el promedio simple funciona correctamente sólo cuando el filtro opere completamente sobre 5 valores −consecutivos− de s (muestras marcadas como "sin borde"). Esto no sucede sobre el principio ni sobre el final de la convolución (muestras marcadas con "borde"), que es cuando el filtro está "entrando" y cuando el filtro está "saliendo". Es decir, como se ilustra en (1) y (2), observamos que la operación de promediación que realiza h sobre s funciona correctamente sólo sobre la parte central de s_f. Los primeros y los últimos valores están afectados por ***dos efectos de borde***: uno que incluye valores con índices que no están inicialmente en la señal s y que deben truncarse como se muestra en (1); y otro en donde el filtro h no logra operar sobre cinco muestras consecutivas (no se realiza completamente), dando una estimación errónea para el promedio de los valores de h, como se muestra en (2).

Ejemplos

A modo de ejemplo, consideremos que $s = (\underline{1}, 1, 1, 1, 1)$ es la señal a filtrar, de N_s muestras, medida a partir de la muestra a tiempo 0.

- Consideremos primero que el operador (filtro) es un operador causal $h = (\underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Al aplicar el filtro obtenemos

$$\hat{s_f} = (\overbrace{\underline{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1}^{N_s}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}),$$

  Luego, las muestras agregadas por la convolución y que debemos descartar se encuentran al final de $\hat{s_f}$. Así, la señal filtrada s_f con la misma dimensión que s está dada por

$$s_f = (\underline{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1).$$

  Es decir, en este caso el efecto de borde del filtro se encuentra al principio de la señal filtrada.

- Si en cambio el filtro es de fase cero $h = (\frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3})$, entonces obtenemos

$$\hat{s_f} = (\frac{1}{3}, \overbrace{\underline{\frac{2}{3}}, 1, 1, 1, \frac{2}{3}}^{N_s}, \frac{1}{3})$$

  Luego, removiendo las muestras agregadas por la convolución:

$$s_f = (\underline{\frac{2}{3}}, 1, 1, 1, \frac{2}{3}).$$

  Es decir, la mitad del efecto del borde del filtro se encuentra al principio de la señal y la otra mitad al final.

- Por último, si $h = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}})$, entonces

$$\hat{s_f} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \overbrace{\underline{1}, 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}}^{N_s})$$

  y por lo tanto descartando las muestras que corresponden:

$$s_f = (\underline{1}, 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

  Es decir, el efecto de borde del filtro se encuentra al final.

Como se desprende de estos ejemplos, el resultado de la convolución debe ser interpretado *sólo para los índices originales del dato de entrada*. Por otro lado, al implementar estos resultados en un lenguaje de programación, como `GNU-OCTAVE`, es común encontrar la expresión:

```
sf = conv(s,h)(offset:offset+Ns-1)
```

que arroja un vector `sf` con la misma cantidad de elementos que `s`, N_s, donde `offset` es el índice correspondiente a la primer muestra de `s`. Por ejemplo, si el filtro h es de fase cero y tiene $N_h = 2M + 1$ muestras, entonces `offset = M+1` y por lo tanto:

```
sf = conv(s,h)(M+1:M+Ns).
```